# Matemáticas NS

Primeros exámenes: 2008

IBO

# PROGRAMA DEL DIPLOMA

# MATEMÁTICAS NS

Primeros exámenes: 2008


**Organización del Bachillerato Internacional**

**Buenos Aires** **Cardiff** **Ginebra** **Nueva York** **Singapur**

# *Programa del Diploma*
# *Matemáticas NS*

Versión en español de la guía publicada en septiembre de 2006 con el título *Mathematics HL*

Publicada en septiembre de 2006

Organización del Bachillerato Internacional
Peterson House, Malthouse Avenue, Cardiff Gate
Cardiff, Wales GB CF23 8GL
Reino Unido
Tel.: + 44 29 2054 7777
Fax: + 44 29 2054 7778
Sitio web: http://www.ibo.org



La Organización del Bachillerato Internacional es una fundación educativa internacional sin fines de lucro. Fue creada en 1968 y tiene sede legal en Suiza.

IBO agradece la autorización para reproducir en esta publicación material protegido por derechos de autor. Cuando procede, se han citado las fuentes originales y, de serle notificado, IBO enmendará cualquier error u omisión con la mayor brevedad posible.

El uso del género masculino en esta publicación no tiene un propósito discriminatorio y se justifica únicamente como medio para hacer el texto más fluido. Se pretende que el español utilizado sea comprensible para todos los hablantes de esta lengua y no refleje una variante particular o regional de la misma.

Los artículos promocionales y las publicaciones de IBO en sus lenguas oficiales y de trabajo pueden adquirirse en la tienda virtual de IBO, disponible en http://store.ibo.org. Las consultas sobre pedidos deben dirigirse al departamento de marketing y ventas en Cardiff.

Tel.: +44 29 2054 7746
Fax: +44 29 2054 7779
Correo-e: sales@ibo.org

*Impreso en el Reino Unido por Anthony Rowe Ltd (Chippenham, Wiltshire)*

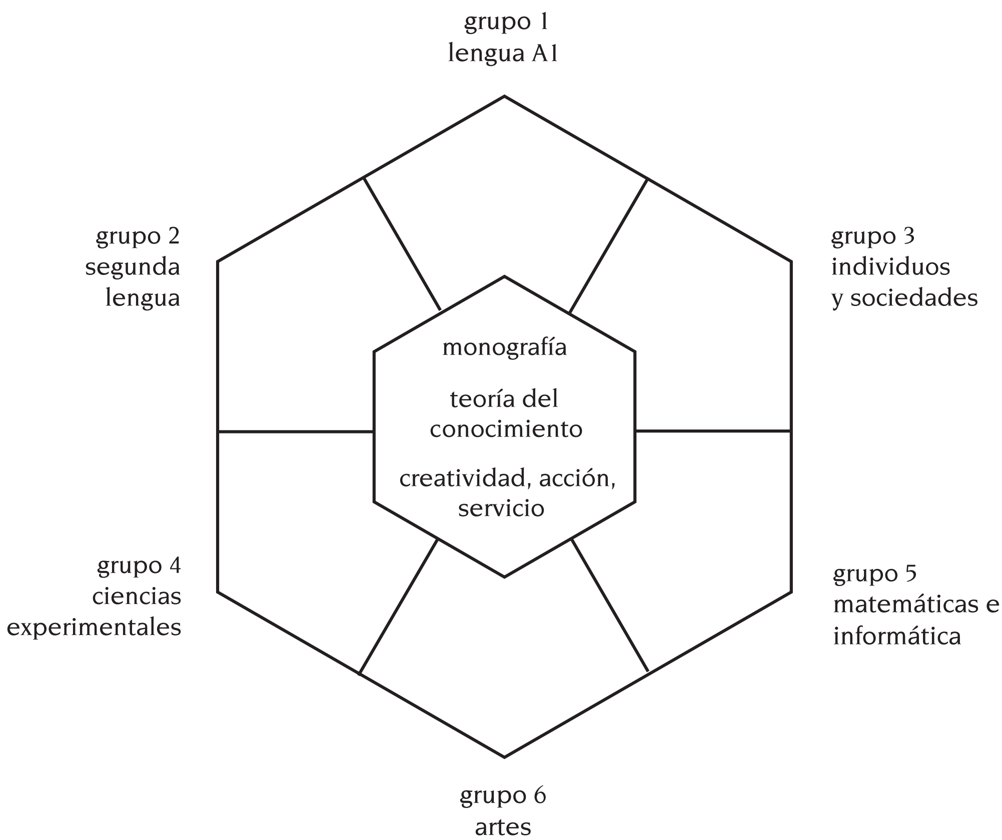
5009

# ÍNDICE

# INTRODUCCIÓN

El Programa del Diploma del Bachillerato Internacional es un curso pre-universitario exigente, diseñado para responder a las necesidades de estudiantes de secundaria altamente motivados, de edades comprendidas entre los 16 y los 19 años. El curso dura dos años y su amplio currículo prepara a los estudiantes para que cumplan con los requisitos de sistemas educativos de distintos países. Su modelo no se basa en el de ninguno en particular, sino que integra los mejores elementos de muchos de ellos. Puede cursarse en inglés, francés y español.

El modelo del programa se presenta en forma de hexágono, con seis áreas académicas en torno al centro. Las asignaturas se estudian simultáneamente y los estudiantes tienen la oportunidad de acceder a las dos grandes áreas tradicionales del saber, las humanidades y las ciencias.




Los alumnos aspirantes al Diploma deben seleccionar una asignatura de cada uno de los seis grupos de asignaturas. Por lo menos tres y no más de cuatro deben cursarse en el Nivel Superior (NS), y las demás en el Nivel Medio (NM). Se dedican 240 horas lectivas a los cursos de Nivel Superior y 150 a los de Nivel Medio. Al organizar los estudios de esta manera, se da a los estudiantes la posibilidad de explorar, en los dos años del programa, algunas disciplinas en profundidad y otras de modo más general. Este plan es el resultado de la búsqueda deliberada de un equilibrio entre la especialización precoz de ciertos sistemas nacionales y la universalidad preferida por otros.

El sistema de elección de asignaturas está concebido de tal manera que permite al estudiante con inclinaciones científicas aprender una lengua extranjera, y al lingüista nato familiarizarse con el trabajo de laboratorio. A la vez que se mantiene un equilibrio general, la flexibilidad de elegir asignaturas en el Nivel Superior permite al estudiante desarrollar áreas en las que está particularmente interesado y reunir los requisitos para el ingreso a la universidad.

Además del estudio de las seis asignaturas, los alumnos aspirantes al Diploma han de cumplir con otros tres requisitos. La Teoría del Conocimiento (TdC) es un curso interdisciplinario concebido para desarrollar un enfoque coherente del aprendizaje, que no sólo trascienda y unifique las diferentes áreas académicas sino que además estimule la apreciación de otras perspectivas culturales. La Monografía, de unas 4.000 palabras, ofrece a los estudiantes la oportunidad de investigar un tema de especial interés y les familiariza con la investigación independiente y el tipo de redacción académica que se espera de ellos en la universidad. La participación en el componente Creatividad, Acción y Servicio (CAS) del colegio anima a los estudiantes a tomar parte en actividades deportivas, artísticas y de servicio a la comunidad en el contexto local, nacional e internacional.

*Primeros exámenes: 2008*

# NATURALEZA DE LA DISCIPLINA

## Introducción

La naturaleza de las matemáticas se puede resumir de varias maneras, por ejemplo como un conjunto de conocimientos bien definido, un sistema abstracto de ideas o una herramienta útil. Es probable que para muchas personas sea una combinación de estas tres cosas, pero no hay duda de que el conocimiento matemático proporciona una clave importante para la comprensión del mundo en que vivimos. Las matemáticas pueden aparecer en nuestra vida de diversas formas: al comprar productos en el mercado, consultar un horario, leer un periódico, cronometrar un proceso o calcular una longitud. Para muchos de nosotros las matemáticas también forman parte de nuestra profesión: los pintores han de aprender perspectiva, los músicos deben comprender las relaciones matemáticas dentro de un mismo ritmo y entre ritmos distintos, los economistas tienen que reconocer tendencias en las transacciones financieras y los ingenieros deben tener en cuenta los tipos de tensión. Los científicos consideran las matemáticas como un lenguaje fundamental para la comprensión de lo que ocurre en la naturaleza. Algunas personas disfrutan de los desafíos que plantean los métodos lógicos de las matemáticas y de la aventura del razonamiento que suponen las demostraciones. Para otras, las matemáticas constituyen una experiencia estética o incluso uno de los pilares de la filosofía. Este predominio de las matemáticas en nuestra vida ofrece motivos claros y suficientes para que sea una asignatura obligatoria del Programa del Diploma.

## Presentación de las asignaturas

Debido a las diversas necesidades, intereses y capacidades de los alumnos, existen cuatro asignaturas distintas de matemáticas pensadas para diferentes grupos de estudiantes: aquellos que quieren estudiar matemáticas en profundidad como una disciplina en sí misma o por su interés en materias afines; los que desean adquirir un cierto grado de comprensión y conocimiento que les ayude en el estudio de otras asignaturas; y aquellos que todavía no son conscientes de la relación que pueden tener las matemáticas con sus estudios y con la vida cotidiana. Cada asignatura está concebida para satisfacer las necesidades de un grupo concreto de estudiantes. Así pues, los alumnos deben elegir cuidadosamente el curso más adecuado para ellos.

Para tomar esta decisión, se debe aconsejar a cada alumno que tenga en cuenta los siguientes factores:

- las destrezas matemáticas que posee y el área de las matemáticas en la que pueda obtener mejores resultados
- su interés personal en las matemáticas y las áreas de la asignatura que puedan resultarle más interesantes
- las otras asignaturas que elige en el Programa del Diploma
- sus planes académicos para el futuro, en concreto las asignaturas que desea estudiar
- la profesión que desea desempeñar en el futuro.

Se espera que los profesores presten ayuda en este proceso y aconsejen a los alumnos sobre el modo de elegir el curso más adecuado entre los cuatro cursos de matemáticas que se ofrecen.

## Estudios Matemáticos NM

Esta asignatura se ofrece sólo en el Nivel Medio (NM). Está destinada a estudiantes con distintas capacidades y niveles de conocimiento. Concretamente, está diseñada para infundir seguridad en relación con las matemáticas y fomentar su comprensión entre los alumnos que no tienen previsto necesitarlas en sus estudios posteriores. Los alumnos que elijan esta asignatura han de poseer unas destrezas básicas y unos conocimientos rudimentarios de los procedimientos fundamentales.

## Matemáticas NM

Esta asignatura está destinada a estudiantes que ya tienen conocimientos sobre los conceptos matemáticos fundamentales y que poseen las destrezas necesarias para aplicar correctamente técnicas matemáticas sencillas. La mayoría de estos alumnos va a necesitar una formación matemática sólida para sus estudios posteriores en áreas tales como la química, la economía, la psicología, y la administración y gestión de empresas.

## Matemáticas NS

Esta asignatura está destinada a estudiantes con una buena formación matemática que poseen una serie de destrezas analíticas y técnicas. Para la mayoría de estos alumnos, las matemáticas constituirán uno de los componentes fundamentales de sus estudios universitarios como materia en sí misma o en áreas tales como la física, la ingeniería y la tecnología. Para otros la elección puede deberse a que tengan un gran interés por las matemáticas, les atraigan sus desafíos y disfruten con la resolución de los problemas que se plantean.

## Ampliación de Matemáticas NM

Esta asignatura se ofrece sólo en el Nivel Medio (NM). Está destinada a estudiantes con una buena formación matemática que han alcanzado un alto nivel de competencia en una serie de destrezas analíticas y técnicas, y que muestran un interés considerable por la materia. La mayor parte de estos alumnos pretende seguir estudios de matemáticas en la universidad, bien como materia en sí misma o bien como componente fundamental de alguna área relacionada con ella. La asignatura se ha concebido específicamente para que los alumnos puedan comprender en profundidad diversas ramas de las matemáticas y conocer también sus aplicaciones prácticas.

# Matemáticas NS: descripción de la asignatura

Esta asignatura está destinada a estudiantes con una buena formación matemática que poseen una serie de destrezas analíticas y técnicas. Para la mayoría de estos alumnos, las matemáticas constituirán uno de los componentes fundamentales de sus estudios universitarios como materia en sí misma o en áreas tales como la física, la ingeniería y la tecnología. Para otros la elección puede deberse a que tengan un gran interés por las matemáticas, les atraigan sus desafíos y disfruten con la resolución de los problemas que se plantean.

La asignatura se caracteriza por centrarse en el desarrollo de importantes conceptos matemáticos de forma comprensible, coherente y rigurosa. Ello se consigue mediante un enfoque cuidadosamente equilibrado. Se pretende que los alumnos apliquen sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas extraídos de una diversidad de contextos. En el desarrollo de los temas se debe dar importancia a la justificación y la demostración de los resultados. Los alumnos que elijan esta asignatura lograrán desarrollar su comprensión de las formas y las estructuras matemáticas y han de estar capacitados para apreciar las relaciones entre conceptos pertenecientes a distintos temas. También se les debe animar a desarrollar las destrezas necesarias para continuar su formación matemática en otros ámbitos de aprendizaje.

El componente de la evaluación interna, la carpeta, ofrece a los alumnos un marco para el desarrollo de su aprendizaje matemático de forma independiente, haciendo que se interesen por la investigación y los modelos matemáticos. Se proporciona a los alumnos oportunidades de reflexionar sobre estas actividades y explorar distintos modos de abordar un problema. La carpeta también permite que los alumnos trabajen sin las limitaciones de tiempo de los exámenes escritos y que desarrollen destrezas para exponer ideas matemáticas.

Este es un curso muy exigente, donde los alumnos deben estudiar una amplia variedad de temas matemáticos a través de distintos enfoques y con distintos niveles de profundidad. Los alumnos que deseen estudiar matemáticas de un modo menos riguroso deben optar por una de las asignaturas del nivel medio, Matemáticas NM o Estudios Matemáticos NM.

# OBJETIVOS GENERALES

Todas las asignaturas del Grupo 5 tienen como meta permitir a los alumnos:

- apreciar las perspectivas multiculturales e históricas de todas las asignaturas de este grupo
- disfrutar de los cursos y llegar a apreciar la elegancia, las posibilidades y la utilidad de las asignaturas
- desarrollar el pensamiento lógico, crítico y creativo
- desarrollar una comprensión de los principios y la naturaleza de la asignatura
- emplear y perfeccionar sus capacidades de abstracción y generalización
- ejercitar la paciencia y la perseverancia en la resolución de problemas
- valorar las consecuencias derivadas de los avances tecnológicos
- aplicar destrezas a distintas situaciones y a la evolución de éstas
- comunicarse con claridad y confianza en diversos contextos.

## Internacionalismo

Uno de los objetivos generales de esta asignatura es permitir a los alumnos apreciar la multiplicidad de las perspectivas históricas y culturales de las matemáticas y, en consecuencia, su dimensión internacional. Los profesores pueden lograr este objetivo mediante debates que surjan al tratarse temas relacionados con este aspecto, y a través de referencias a la información de contexto adecuada. Por ejemplo, podría ser conveniente fomentar el debate entre los alumnos sobre:

- diferencias de notación
- las vidas de los matemáticos en su contexto histórico y social
- el contexto cultural de los descubrimientos matemáticos
- la forma en que se han realizado ciertos descubrimientos matemáticos y las técnicas utilizadas para ello
- el modo en que se manifiestan las actitudes de las distintas sociedades ante determinados aspectos de las matemáticas
- la universalidad de las matemáticas como medio de comunicación.

# OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Se espera que los alumnos que hayan seguido cualquiera de los cursos de matemáticas del Grupo 5 conozcan y utilicen conceptos y principios matemáticos. En concreto, han de ser capaces de:

- leer, interpretar y resolver un problema dado utilizando términos matemáticos adecuados
- organizar y representar la información y los datos en forma de tablas, gráficas y diagramas
- conocer y utilizar la terminología y la notación adecuadas
- formular un razonamiento matemático y exponerlo con claridad
- seleccionar y utilizar técnicas y estrategias matemáticas adecuadas
- demostrar la comprensión tanto del significado de los resultados como de su coherencia
- reconocer modelos y estructuras en situaciones diversas y hacer generalizaciones
- reconocer y manifestar una comprensión de las aplicaciones prácticas de las matemáticas
- utilizar como herramientas matemáticas los instrumentos tecnológicos apropiados
- manifestar una comprensión y un uso adecuado de los modelos matemáticos.

# RESUMEN DEL PROGRAMA DE ESTUDIOS

## Matemáticas NS

El programa de estudios de la asignatura se compone de siete unidades que constituyen el tronco común y una unidad opcional.

**Total 240 h**

## Unidades del tronco común — 190 h

### Requisitos

Todas las unidades del tronco común son obligatorias. Los alumnos deberán estudiar todos los temas de cada una de esas unidades del programa de estudios que se especifican en esta guía. Asimismo, deben estar familiarizados con los temas incluidos como conocimientos previos (CP).

| | |
|---|---|
| Unidad 1: Álgebra | 20 h |
| Unidad 2: Funciones y ecuaciones | 26 h |
| Unidad 3: Funciones circulares y trigonometría | 22 h |
| Unidad 4: Matrices | 12 h |
| Unidad 5: Vectores | 22 h |
| Unidad 6: Estadística y probabilidad | 40 h |
| Unidad 7: Análisis | 48 h |

## Unidades opcionales — 40 h

### Requisitos

Los alumnos deben estudiar todos los temas de una de las siguientes unidades opcionales, según se especifican en la descripción detallada del programa de estudios.

| | |
|---|---|
| Unidad 8: Estadística y probabilidad | 40 h |
| Unidad 9: Conjuntos, relaciones y grupos | 40 h |
| Unidad 10: Series y ecuaciones diferenciales | 40 h |
| Unidad 11: Matemática discreta | 40 h |

## Carpeta — 10 h

Dos trabajos, a partir de distintas áreas del programa de estudios, que reflejen los dos tipos de tarea siguientes:

- investigación matemática
- utilización de modelos matemáticos.

# DESCRIPCIÓN DETALLADA DEL PROGRAMA DE ESTUDIOS

## Estructura del programa de estudios

El programa de estudios que se debe impartir en las clases se presenta organizado en tres columnas.

- **Contenidos**: la primera columna especifica, bajo cada unidad, los temas que se deben tratar.
- **Ampliaciones/inclusiones**: la segunda columna contiene información más específica acerca de los temas detallados en la primera columna. Ello ayuda a delimitar lo que es obligatorio en la preparación del examen.
- **Exclusiones**: la tercera columna contiene información sobre lo que no es obligatorio en la preparación del examen.

Aunque el curso de Matemáticas NS es similar en sus contenidos a algunas partes del curso de Matemáticas NM, existen diferencias. En concreto, se pretende que los alumnos y los profesores realicen un enfoque más complejo en el curso de Matemáticas NS, tanto durante el desarrollo del curso como en los exámenes. Cuando el caso lo requiere, se proporcionan pautas a seguir en la segunda y tercera columnas de la descripción detallada del programa de estudios (lo cual se indica con la frase "Consultar la guía de Matemáticas NM").

En publicación aparte se pueden encontrar notas para los profesores y sugerencias para el uso de las calculadoras en relación con el programa de estudios.

## Programación del curso

Los profesores han de impartir todos los temas de las siete unidades del tronco común, junto con todos los temas de la unidad opcional elegida.

No es necesario impartir las unidades del programa de estudios en el mismo orden en el que aparecen en esta guía. Asimismo, no es necesario impartir todas las unidades del tronco común antes de empezar a estudiar una unidad opcional. Los profesores han de estructurar el curso para que se adapte a las necesidades de sus alumnos, con el objetivo de integrar las áreas contempladas en el programa de estudios y, cuando sea necesario, los conocimientos previos.

## Integración de las tareas de la carpeta

Los dos trabajos de la carpeta, desarrollados a partir de los dos tipos de tarea (investigación matemática y utilización de modelos matemáticos), deben integrarse en la programación y han de estar directamente relacionados con el programa de estudios. En el apartado correspondiente a la evaluación interna se proporciona información detallada sobre cómo hacerlo.

# Distribución del tiempo

La carga horaria recomendada para los cursos del Nivel Superior es de 240 horas. Para Matemáticas NS, 10 de esas horas se dedicarán a la carpeta. La distribución del tiempo establecida en esta guía es aproximada y tiene por finalidad sugerir cómo podrían distribuirse las restantes 230 horas de docencia del programa de estudios. Sin embargo, el tiempo exacto dedicado a cada unidad dependerá de diversos factores, como la formación previa y el nivel de preparación de cada alumno. Los profesores deben pues ajustar este esquema a las necesidades de sus alumnos.

# Uso de calculadoras

Se espera que los alumnos dispongan de una calculadora de pantalla gráfica durante el curso, en todo momento. Se proporcionará a los colegios información actualizada respecto a los requisitos mínimos a medida que la tecnología evolucione. Los profesores y los colegios deben supervisar el uso de las calculadoras de acuerdo con la reglamentación sobre las mismas. Se publica cada año en el *Vademécum* información sobre los tipos de calculadoras permitidas. Para más información y orientación, consulte el material de ayuda al profesor.

Existen requisitos específicos para las calculadoras que han de utilizar los alumnos en la unidad opcional de Estadística y probabilidad.

# Cuadernillo de información de Matemáticas NS

Puesto que todos los alumnos deben poder disponer de un ejemplar sin anotaciones de este cuadernillo durante el examen, se recomienda que los profesores se aseguren que sus alumnos conocen su contenido desde el principio del curso. El cuadernillo lo proporciona IBO y se publica por separado.

# Material de ayuda al profesor

Esta guía se complementa con una serie de materiales de ayuda al profesor. Los mismos incluirán sugerencias para ayudar a los profesores a integrar el uso de calculadoras de pantalla gráfica en las actividades didácticas, orientación para la corrección de carpetas y ejemplos de pruebas de examen y esquemas de calificación. Este material se enviará a todos los colegios.

# Pautas para la evaluación externa

Se recomienda que los profesores se familiaricen con las pautas para la evaluación externa, que incluyen información importante acerca de las pruebas de examen. Asimismo, los alumnos deberán conocer la notación y la terminología utilizadas por IBO, ya que se emplean sin explicación en las pruebas de examen.

# Conocimientos previos

## Generalidades

No se exige que los alumnos estén familiarizados con todos los temas incluidos en la lista de conocimientos previos (CP) **antes** de comenzar el curso. Sin embargo, sí deberán estarlo antes de los **exámenes**, porque en las preguntas se dará por supuesto su conocimiento.

Los profesores deberán, por tanto, asegurarse de que cualquier tema incluido en la lista de CP que sus alumnos no dominen al principio del curso se imparta en las primeras etapas del mismo. Deberán también tener en cuenta el conocimiento matemático que sus alumnos ya poseen a la hora de diseñar una programación adecuada para Matemáticas NS.

Esta relación de temas no pretende ser el resumen de un curso de introducción a la asignatura de Matemáticas NS, sino que enumera los conocimientos que, junto con los contenidos del programa de estudios, son imprescindibles para poder seguir y superar el curso de Matemáticas NS.

Los alumnos también deben conocer las unidades de longitud, masa y tiempo del SI (Sistema Internacional) y sus derivadas.

# Temas

## Aritmética y álgebra

Uso habitual de la suma, resta, multiplicación y división con enteros, decimales y fracciones, incluyendo el orden de las operaciones.

*Ejemplo*: $2(3+4\times7)=62$

Potencias sencillas con exponente positivo.

*Ejemplos*: $2^3=8$; $(-3)^3=-27$; $(-2)^4=16$

Simplificación de expresiones con radicales (irracionales o no).

*Ejemplos*: $\sqrt{27}+\sqrt{75}=8\sqrt{3}$; $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$

Números primos y divisores, incluyendo el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

Aplicaciones sencillas de razones, porcentajes y proporciones, en relación con la semejanza.

Definición y uso elemental del valor absoluto (módulo), $|a|$.

Redondeo, aproximaciones decimales y cifras significativas, incluyendo la estimación de errores.

Expresión de números en forma estándar (notación científica), es decir, $a\times10^k$, $1\leq a<10$, $k\in Z$.

Concepto y notación de conjunto, elemento, conjunto universal (de referencia), conjunto vacío (nulo), conjunto complementario, subconjunto, igualdad de conjuntos, conjuntos disjuntos. Operaciones con conjuntos: unión e intersección. Propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. Diagramas de Venn.

Conjuntos de números: números naturales; enteros, $\mathbb{Z}$; racionales, $\mathbb{Q}$, e irracionales; números reales, $\mathbb{R}$.

Intervalos de la recta real utilizando la notación de conjuntos y las inecuaciones. Conjunto de soluciones de una inecuación de primer grado indicado en la recta numérica y expresado mediante la notación de conjuntos.

Concepto de relación entre los elementos de un mismo conjunto y entre los elementos de dos conjuntos distintos. Aplicaciones de los elementos de un conjunto en otro conjunto o en el mismo. Ejemplos con tablas, diagramas y gráficas.

Manejo básico de expresiones algebraicas sencillas que incluya factorización y desarrollo.

*Ejemplos*: $ab+ac=a(b+c)$; $(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm2ab$; $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;
$3x^2+5x+2=(3x+2)(x+1)$; $xa-2a+xb-2b=(x-2)(a+b)$

Transformación, cálculo del valor numérico y combinación de expresiones sencillas. Se deben incluir ejemplos relacionados con otras asignaturas, en especial las de ciencias.

La función lineal $x\mapsto ax+b$ y su gráfica, pendiente e intersección con el eje $y$.

Suma y resta de fracciones algebraicas con denominadores de la forma $ax+b$.

*Ejemplo*: $\dfrac{2x}{3x-1}+\dfrac{3x+1}{2x+4}$

Propiedades de las relaciones de orden: $<, \leq, >, \geq$ .

*Ejemplos*: $a > b,\ c > 0 \Rightarrow ac > bc$; $a > b,\ c < 0 \Rightarrow ac < bc$

Resolución de ecuaciones e inecuaciones con una incógnita, incluyendo los casos con coeficientes racionales.

*Ejemplo*: $\frac{3}{7} - \frac{2x}{5} = \frac{1}{2}(1 - x) \Rightarrow x = \frac{5}{7}$

Resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

## Geometría

Geometría elemental del plano, incluyendo el concepto de dimensión de punto, recta, plano y espacio. Rectas paralelas y perpendiculares, incluyendo $m_1 = m_2$ y $m_1 m_2 = -1$. Geometría de las figuras planas sencillas. La función $x \mapsto ax + b$ : su gráfica, pendiente e intersección con el eje *y*.

Medida de ángulos en grados. Rumbos y demoras. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Aplicaciones sencillas a la resolución de triángulos.

Teorema de Pitágoras y su recíproco.

El plano cartesiano: pares ordenados (*x, y*), origen, ejes. Punto medio de un segmento de recta y distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.

Transformaciones geométricas sencillas: traslación, simetría, rotación, homotecia. Congruencia y semejanza, incluyendo el concepto de razón de una homotecia.

El círculo, centro y radio, área y circunferencia. Los términos “arco”, “sector circular”, “cuerda”, “tangente” y “segmento circular”.

Perímetro y área de las figuras planas. Triángulos y cuadriláteros, incluyendo paralelogramos, rombos, rectángulos, cuadrados, cometas, trapecios y trapezoides; figuras combinadas.

## Estadística

Estadística descriptiva: recopilación de datos de la realidad, representación pictórica o gráfica (por ejemplo, gráficas de sectores, pictogramas, diagramas de tallos y hojas, gráficas de barras y gráficas de líneas).

Cálculos de parámetros estadísticos sencillos de datos discretos, incluyendo la media, la mediana y la moda.

# Unidades del tronco común

## Unidad 1 (tronco común): Álgebra 20 h

### Objetivos generales

El objetivo general de esta unidad es introducir algunos conceptos y aplicaciones algebraicos elementales.

### Descripción detallada

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **1.1** | Progresiones aritméticas y series aritméticas; suma finita de series aritméticas; progresiones geométricas y series geométricas; suma finita e infinita de series geométricas.<br><br>Notación de sumatoria. | Ejemplos de aplicaciones: interés compuesto y crecimiento demográfico. | |
| **1.2** | Potencias y logaritmos.<br><br>Propiedades de las potencias; propiedades de los logaritmos.<br><br>Cambio de base. | Sólo se requiere un estudio elemental.<br><br>$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ | |
| **1.3** | Reglas de recuento, incluyendo permutaciones y combinaciones.<br><br>Teorema del binomio: desarrollo de $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$. | Únicamente aplicaciones sencillas.<br><br>La expresión de $\binom{n}{r}$ también conocida como ${}^{n}\mathrm{C}_r$. | La expresión de ${}^{n}\mathrm{P}_r$.<br><br>Permutaciones con repetición.<br><br>**Consultar la guía de Matemáticas NM.** |

## Unidad 1 (tronco común): Álgebra (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **1.4** | Demostración por inducción matemática.<br><br>Elaboración de conjeturas que se puedan demostrar por inducción matemática. | | Demostración del teorema del binomio. |
| **1.5** | Números complejos: el número $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ ; los términos parte real, parte imaginaria, conjugado, módulo y argumento.<br><br>La forma cartesiana $z=a+\mathrm{i}b$.<br><br>La forma módulo-argumental $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$.<br><br>El plano complejo. | Noción de que $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$ se puede escribir como $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ y como $z=r\,\mathrm{cis}\,\theta$.<br><br>El plano complejo también se conoce como plano de Argand. | Lugares geométricos en el plano complejo. |
| **1.6** | Sumas, productos y cocientes de números complejos. | | |
| **1.7** | Teorema de de Moivre.<br><br>Potencias y raíces de un número complejo. | Demostración por inducción matemática para $n\in\mathbb{Z}^+$. | |
| **1.8** | Raíces conjugadas de ecuaciones polinómicas con coeficientes reales. | | Ecuaciones con coeficientes complejos. |

# Unidad 2 (tronco común): Funciones y ecuaciones

26 h

## Objetivos generales

Los objetivos generales de esta unidad son estudiar el concepto de función como tema unificador de las matemáticas y aplicar las funciones como método para abordar distintas situaciones en matemáticas. Se espera que se haga un amplio uso de las calculadoras de pantalla gráfica tanto en el desarrollo de los temas de esta unidad como en sus aplicaciones.

## Descripción detallada

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **2.1** | Concepto de función $f: x \mapsto f(x)$: dominio, recorrido; imagen (valor). | En los exámenes: si el dominio es el conjunto de los números reales, se omitirá la expresión $x \in \mathbb{R}$. | El término codominio. |
| | Composición de funciones $f \circ g$; función identidad. | La función compuesta $(f \circ g)(x)$ se define como $f(g(x))$. | |
| | Función inversa $f^{-1}$. | Distinción entre funciones biyectivas y no biyectivas. Restricción del dominio. | **Consultar la guía de Matemáticas NM.** |
| **2.2** | Gráfica de una función; su ecuación $y = f(x)$. | En los exámenes: se podrán formular preguntas en las que se pida la representación gráfica de funciones que no aparecen explícitamente en el programa de estudios. | |
| | Habilidades referidas a la representación gráfica de funciones: | | |
| | uso de la calculadora de pantalla gráfica para obtener la gráfica de diversas funciones; | | |
| | estudio de las características principales de las gráficas; | Identificación de asíntotas. | |
| | resolución gráfica de ecuaciones. | Podrán denominarse tanto raíces de ecuaciones como ceros de las funciones. | |

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **2.3** | Transformaciones de gráficas: traslaciones; estiramientos; simetrías respecto a los ejes.<br><br>La gráfica de $y = f^{-1}(x)$ como simétrica de la gráfica de $y = f(x)$ respecto a la recta $y = x$.<br><br>Gráfica de $y = \dfrac{1}{f(x)}$ a partir de $y = f(x)$.<br><br>Gráficas de las funciones valor absoluto, $y = \lvert f(x) \rvert$ e $y = f(\lvert x \rvert)$. | Traslaciones: $y = f(x) + b$; $y = f(x - a)$.<br><br>Estiramientos: $y = pf(x)$; $y = f(x/q)$.<br><br>Simetrías (respecto a los dos ejes): $y = -f(x)$; $y = f(-x)$.<br><br>Ejemplos: $y = x^2$ utilizada para obtener $y = 3x^2 + 2$ mediante un estiramiento de razón 3 en la dirección del eje *y*, seguido de la traslación $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.<br><br>$y = \text{sen } x$ utilizada para obtener $y = 3 \text{ sen } 2x$ mediante un estiramiento de razón 3 en la dirección del eje *y*, y un estiramiento de razón $\dfrac{1}{2}$ en la dirección del eje *x*. | |

# Unidad 2 (tronco común): Funciones y ecuaciones (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **2.4** | La función recíproca $x \mapsto \frac{1}{x}, x \neq 0$ su gráfica; su propiedad de coincidir con su inversa. | | |
| **2.5** | La función cuadrática $x \mapsto ax^2 + bx + c$: su gráfica.<br><br>Eje de simetría, $x = -\frac{b}{2a}$.<br><br>La forma $x \mapsto a(x-h)^2 + k$.<br><br>La forma $x \mapsto a(x-p)(x-q)$. | Únicamente con coeficientes reales. | |
| **2.6** | Resolución de $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.<br><br>La fórmula de la solución de una ecuación de segundo grado.<br><br>Uso del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. | | En los exámenes: no se formularán preguntas que requieran técnicas de factorización complicadas. |
| **2.7** | La función: $x \mapsto a^x$, $a > 0$.<br><br>La función inversa $x \mapsto \log_a x$, $x > 0$.<br><br>Gráficas de $y = a^x$ e $y = \log_a x$.<br><br>Resolución de $a^x = b$ utilizando logaritmos. | $\log_a a^x = x$; $a^{\log_a x} = x$, $x > 0$. | |

## Unidad 2 (tronco común): Funciones y ecuaciones (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **2.8** | La función exponencial $x \mapsto e^x$.<br><br>La función logarítmica $x \mapsto \ln x$, $x > 0$. | $a^x = e^{x \ln a}$<br><br>Ejemplos de aplicaciones: interés compuesto, crecimiento y decrecimiento. | |
| **2.9** | Resolución gráfica de inecuaciones con una incógnita.<br><br>Resolución de $g(x) \geq f(x)$, donde *f*, *g* son funciones lineales o cuadráticas. | Uso del símbolo del valor absoluto en las inecuaciones.<br><br>Resolución analítica en casos sencillos. | En los exámenes: no se formularán preguntas que impliquen operaciones complejas. |
| **2.10** | Funciones polinómicas.<br><br>Teorema del resto y teorema del divisor, junto con sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones e inecuaciones polinómicas. | Significado gráfico de las raíces múltiples. | |

# Unidad 3 (tronco común): Funciones circulares y trigonometría 22 h

## Objetivos generales

Los objetivos generales de esta unidad son analizar las funciones circulares, introducir algunas relaciones trigonométricas importantes y resolver triángulos aplicando la trigonometría.

## Descripción detallada

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **3.1** | El círculo: medida de ángulos en radianes; longitud de un arco; área del sector circular. | La medida en radianes puede expresarse mediante múltiplos de $\pi$, o con decimales. | |
| **3.2** | Definición de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ en el círculo de radio unidad o radio unitario.<br><br>Definición de $\operatorname{tg}\theta$ como $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.<br><br>Definición de $\sec\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ y $\operatorname{cotg}\theta$.<br><br>Relación fundamental: $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$;<br>$1+\operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$; $1+\operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$. | | **Consultar la guía de Matemáticas NM.** |

# Unidad 3 (tronco común): Funciones circulares y trigonometría (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **3.3** | Fórmulas de la suma y diferencia de dos ángulos.<br><br>Fórmulas del ángulo doble. | Demostración de las fórmulas: $\operatorname{sen}(A \pm B)$, $\cos(A \pm B)$, $\operatorname{tg}(A \pm B)$.<br><br>Demostración de las fórmulas del ángulo doble.<br><br>Dado el $\operatorname{sen}\theta$, cálculo de los posibles valores de otras razones (por ejemplo, $\operatorname{sen}2\theta$) sin hallar el valor de $\theta$. | **Consultar la guía de Matemáticas NM.** |
| **3.4** | Las funciones circulares $\operatorname{sen}x$, $\cos x$ y $\operatorname{tg}x$, dominios y recorridos; periodicidad; gráficas.<br><br>Funciones compuestas de la forma $f(x) = a\operatorname{sen}(b(x+c)) + d$.<br><br>Las funciones inversas $x \mapsto \operatorname{arcsen}x$, $x \mapsto \arccos x$, $x \mapsto \operatorname{arctg}x$; sus dominios y recorridos; sus gráficas. | En los exámenes: se dará por supuesto que las medidas son en radianes a menos que se indique otra cosa, por ejemplo, $x \mapsto \operatorname{sen}x^\circ$.<br><br>Ejemplo: $f(x) = 3\operatorname{tg}(4(x-2)) + 1$.<br><br>Ejemplos de aplicaciones: altura de las mareas, norias. | En los exámenes: no se formularán preguntas que requieran un tratamiento analítico complejo de las funciones trigonométricas inversas.<br><br>**Consultar la guía de Matemáticas NM.** |

## Unidad 3 (tronco común): Funciones circulares y trigonometría (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **3.5** | Resolución de ecuaciones trigonométricas en un intervalo acotado.<br><br>Uso de las relaciones trigonométricas y la factorización para transformar las ecuaciones. | Ejemplos:<br>$2\,\mathrm{sen}\,x = 3\cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$ ;<br>$2\,\mathrm{sen}\,2x = 3\cos x,\ 0° \le x \le 180°$ ;<br>$2\,\mathrm{sen}\,x = \cos 2x,\ -\pi \le x \le \pi$ .<br><br>Se requieren tanto métodos analíticos como gráficos. | La solución general de ecuaciones trigonométricas. |
| **3.6** | Resolución de triángulos.<br><br>Teorema del coseno: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.<br><br>Teorema del seno: $\frac{a}{\mathrm{sen}\,A} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,B} = \frac{c}{\mathrm{sen}\,C}$.<br><br>Área del triángulo mediante la fórmula $\frac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}\,C$ . | El caso ambiguo del teorema del seno.<br><br>Aplicaciones a situaciones de la vida real en dos dimensiones y casos sencillos en tres dimensiones, por ejemplo, en navegación. | |

# Unidad 4 (tronco común): Matrices 12h

## Objetivos generales

El objetivo general de esta unidad es proporcionar una introducción elemental a las matrices, un concepto fundamental del álgebra lineal.

## Descripción detallada

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **4.1** | Definición de matriz: los términos elemento, fila, columna y orden. | Uso de las matrices para almacenar datos. | Uso de las matrices para representar transformaciones. |
| **4.2** | Álgebra de matrices: igualdad; suma; resta; multiplicación por un escalar.<br><br>Producto de matrices.<br><br>Matriz identidad y matriz nula. | Operaciones con matrices para organizar y procesar la información. | |
| **4.3** | Determinante de una matriz cuadrada. | El concepto de matriz singular y matriz no singular. | |
| | Cálculo de determinantes de matrices de orden $2\times 2$ y $3\times 3$. | La propiedad $\det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$ . | Cofactores (o adjuntos) y menores. |
| | Inversa de una matriz: condiciones de existencia. | Obtención de la inversa de una matriz de orden $3\times 3$ utilizando la calculadora de pantalla gráfica. | Otros métodos para obtener la inversa de una matriz de orden $3\times 3$. |
| **4.4** | Resolución de sistemas de ecuaciones lineales (máximo de tres ecuaciones con tres incógnitas). | | |
| | Condiciones para que exista una solución única, que no exista ninguna solución o que existan infinitas soluciones. | Estos casos se pueden estudiar utilizando la reducción de filas, incluyendo el uso de matrices ampliadas. Las soluciones únicas también se pueden calcular utilizando las matrices inversas. | |

# Unidad 5 (tronco común): Vectores 22 h

## Objetivos generales

El objetivo general de esta unidad es introducir el uso de los vectores en dos y tres dimensiones, y facilitar la resolución de problemas relacionados con puntos, rectas y planos.

## Descripción detallada

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **5.1** | Los vectores como desplazamientos en el plano y en el espacio. | Distancia entre dos puntos en tres dimensiones. | |
| | Componentes de un vector; representación en columna $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$. | Las componentes están referidas a los vectores unitarios $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (base canónica). | |
| | Enfoques algebraico y geométrico de los siguientes temas: | | |
| | suma y diferencia de dos vectores; el vector nulo, el vector $-\boldsymbol{v}$; | La diferencia de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ como $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{w})$. | |
| | multiplicación por un escalar, $k\boldsymbol{v}$; | | |
| | módulo de un vector, $\lvert\boldsymbol{v}\rvert$; | | |
| | vectores unitarios; la base $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$; | | |
| | vectores de posición $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}$. | $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. | |

## Unidad 5 (tronco común): Vectores (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **5.2** | Producto escalar de dos vectores, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=\lvert\boldsymbol{v}\rvert\lvert\boldsymbol{w}\rvert\cos\theta$ ; $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3$ .<br><br>Propiedades algebraicas del producto escalar.<br><br>Vectores perpendiculares; vectores paralelos.<br><br>Ángulo entre dos vectores. | El producto escalar también se denomina producto punto o producto interior.<br><br>Para vectores perpendiculares no nulos $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$ ; para vectores paralelos no nulos $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=\pm\lvert\boldsymbol{v}\rvert\lvert\boldsymbol{w}\rvert$ . | Proyecciones. |
| **5.3** | Ecuación vectorial de una recta $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ .<br><br>Ángulo entre dos rectas. | Rectas en el plano y en el espacio tridimensional.<br><br>Conocimiento de las siguientes formas de la ecuación de una recta.<br><br>Forma paramétrica: $x=x_0+\lambda l$ , $y=y_0+\lambda m$ , $z=z_0+\lambda n$ .<br><br>Forma cartesiana: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ . | **Consultar la guía de Matemáticas NM.** |

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **5.4** | Rectas coincidentes, rectas paralelas, rectas que se cortan, rectas que se cruzan, distinción entre estos casos.<br><br>Puntos de intersección. | | |
| **5.5** | Producto vectorial de dos vectores, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$.<br><br>Expresión mediante el determinante.<br><br>Interpretación geométrica de $\lvert \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rvert$. | El producto vectorial se suele representar por una cruz.<br><br>Áreas de triángulos y paralelogramos. | |
| **5.6** | Ecuación vectorial de un plano $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} + \mu \boldsymbol{c}$.<br><br>Utilización del vector normal para obtener la expresión $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}$.<br><br>Ecuación cartesiana de un plano $ax + by + cz = d$. | | |
| **5.7** | Intersecciones de: una recta y un plano; dos planos; tres planos.<br><br>Ángulo entre: una recta y un plano; dos planos. | Método de la matriz inversa y la reducción de filas para hallar la intersección de tres planos.<br><br>Noción de que tres planos pueden cortarse en un punto, cortarse en una recta o no cortarse. | |

# Unidad 6 (tronco común): Estadística y probabilidad 40 h

## Objetivos generales

El objetivo general de esta unidad es introducir conceptos básicos que se pueden organizar en tres grupos: manejo y representación de datos estadísticos (6.1–6.4), leyes de la probabilidad (6.5–6.8) y variables aleatorias y sus distribuciones de probabilidad (6.9–6.11). Se supone que la mayoría de los cálculos se harán con la calculadora de pantalla gráfica. Se hará énfasis en la comprensión y la interpretación de los resultados obtenidos.

## Descripción detallada

| | **Contenidos** | **Ampliaciones/inclusiones** | **Exclusiones** |
|---|---|---|---|
| **6.1** | Conceptos de población, muestra, muestra aleatoria y distribuciones de frecuencia de datos discretos y continuos. | Sólo un estudio elemental. | |
| **6.2** | Representación de datos: tablas de frecuencias y diagramas de frecuencias, diagramas de caja y bigote. | Estudio de datos discretos y continuos. | |
| | Datos agrupados: valores centrales de los intervalos, amplitud de los intervalos, límites superior e inferior de los intervalos, | | |
| | histogramas de frecuencias. | En un histograma de frecuencias los intervalos de clase tienen la misma amplitud. | Histogramas con intervalos de clase de distinta amplitud. |

# Unidad 6 (tronco común): Estadística y probabilidad (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **6.3** | Media, mediana, moda; cuartiles, percentiles.<br><br>Rango; rango intercuartil; varianza, desviación típica. | Noción de que, por lo general, la media de la población, $\mu$, se desconoce, y que la media muestral, $\bar{x}$, es una estimación sin sesgo de la anterior.<br><br>Comprensión del concepto de dispersión y del significado del valor numérico de la desviación típica. Obtención de la desviación típica (e indirectamente de la varianza) mediante la calculadora de pantalla gráfica y por otros métodos.<br>Noción de que, por lo general, la varianza de la población, $\sigma^2$, se desconoce, y que, $s_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} s_n^2$, es una estimación sin sesgo de $\sigma^2$. | Estimación de la moda a partir de un histograma. Tratamiento formal de la estimación sin sesgo.<br><br>**Consultar la guía de Matemáticas NM.** |
| **6.4** | Frecuencia acumulada; gráficas de la frecuencia acumulada; su uso para calcular la mediana, cuartiles y percentiles. | | |
| **6.5** | Conceptos de experimento, resultado, resultados equiprobables, espacio muestral ($U$) y suceso.<br><br>Probabilidad de un suceso $A$ como $\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$.<br><br>Los sucesos complementarios $A$ y $A'$ (no $A$); $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A') = 1$. | El cálculo de $n(A)$ y de $n(U)$ puede implicar el uso de las reglas de recuento. | |

# Unidad 6 (tronco común): Estadística y probabilidad (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **6.6** | Sucesos compuestos, la fórmula: $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.<br><br>$\mathrm{P}(A \cap B) = 0$ para sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes. | Reconocimiento del "o" no exclusivo.<br><br>Uso de $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ para sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes. | |
| **6.7** | Probabilidad condicionada; definición: $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.<br><br>Sucesos independientes; definición $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B')$.<br><br>Aplicación del teorema de Bayes con dos sucesos. | El término "independiente" es equivalente a "estadísticamente independiente". Uso de $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ para sucesos independientes.<br><br>$\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(B')\mathrm{P}(A \mid B')}$ | |
| **6.8** | Uso de diagramas de Venn, diagramas de árbol y tablas en la resolución de problemas. | | |

# Unidad 6 (tronco común): Estadística y probabilidad (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **6.9** | Concepto de variables aleatorias discretas y continuas y sus distribuciones de probabilidad.<br><br>Definición y uso de las funciones densidad de probabilidad.<br><br>Esperanza matemática (media), moda, mediana, varianza y desviación típica. | Conocimiento y uso de las fórmulas de $\mathrm{E}(X)$ y de $\mathrm{Var}(X)$.<br><br>Aplicaciones de la esperanza matemática en, por ejemplo, juegos de azar. | **Consultar la guía de Matemáticas NM.** |
| **6.10** | Distribución binomial, su media y su varianza.<br>Distribución de Poisson, su media y su varianza. | Condiciones bajo las cuales las variables aleatorias tienen esas distribuciones. | Demostración formal de las medias y las varianzas.<br><br>**Consultar la guía de Matemáticas NM.** |
| **6.11** | Distribución normal.<br><br>Propiedades de una distribución normal.<br><br>Tipificación o estandarización de variables en una distribución normal. | Concepto de que la variable tipificada o estandarizada ($z$) mide la desviación de la media en unidades de la desviación típica.<br><br>Uso de la calculadora (o tablas) para calcular probabilidades en una distribución normal; proceso inverso. | Aproximación de una binomial por una normal. |

# Unidad 7 (tronco común): Análisis 48 h

## Objetivos generales

El objetivo general de esta unidad es introducir conceptos y técnicas elementales del cálculo diferencial e integral y sus aplicaciones.

## Descripción detallada

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **7.1** | Idea informal de límite y convergencia. | Únicamente un tratamiento informal de límite y convergencia, incluyendo el resultado $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$. | |
| | Definición de derivada como $f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$. | Aplicación de esta definición para establecer la derivada de un polinomio, y para la justificación de otras derivadas.<br><br>Familiaridad con las dos formas de notación, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ y $f'(x)$, para la derivada primera. | |
| | Derivada de $x^n$ $(n \in \mathbb{Q})$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\mathrm{e}^x$ y $\ln x$. | | En los exámenes: no será necesario que los alumnos demuestren estos resultados. |
| | Interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva y como medida de la razón de cambio entre dos variables. | Obtención de las ecuaciones de las tangentes y las normales. Identificación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. | |
| | Derivadas de las funciones circulares recíprocas. Derivadas de $a^x$ y $\log_a x$. Derivadas del $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$. | | **Consultar la guía de Matemáticas NM.** |

# Unidad 7 (tronco común): Análisis (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **7.2** | Derivada de la suma y del producto por un escalar de las funciones del apartado 7.1.<br><br>Regla de la cadena para la composición de funciones. Aplicación de la regla de la cadena a medidas de razón de cambio entre dos variables relacionadas.<br><br>Regla del producto y del cociente.<br><br>Derivada segunda.<br><br>Conocimiento de las derivadas de orden superior. | Familiaridad con las dos formas de notación, $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ y $f''(x)$, para la derivada segunda.<br><br>Familiaridad con las notaciones $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$, $f^{(n)}(x)$. | **Consultar la guía de Matemáticas NM.** |
| **7.3** | Máximos y mínimos locales.<br><br>Aplicación de las derivadas primera y segunda en problemas de optimización. | Comprobación de máximos y mínimos utilizando el cambio de signo en la derivada primera y el signo de la derivada segunda.<br><br>Ejemplos de aplicaciones: beneficios, áreas, volúmenes. | |

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **7.4** | La integral indefinida como primitiva (antiderivada) de una función.<br><br>Integral indefinida de $x^n$ $(n \neq -1)$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $e^x$, $\frac{1}{x}$.<br><br>Funciones compuestas de las anteriores con la función lineal $ax+b$. | Interpretación de la integral indefinida como una familia de curvas.<br><br>$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$<br><br>Ejemplo:<br>$f'(x) = \cos(2x+3) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x+3) + C$. | **Consultar la guía de Matemáticas NM.** |
| **7.5** | Integración con una restricción para determinar el término constante.<br><br>Integral definida.<br><br>Cálculo de áreas entre una curva y el eje $x$ o el eje $y$ en un intervalo dado, cálculo de áreas entre curvas.<br><br>Volúmenes de revolución. | Ejemplo: si $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + x$ e $y = 10$ cuando $x = 0$, entonces $y = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 10$.<br><br>$\int_a^b y\,dx$ y $\int_a^b x\,dy$.<br><br>Revolución alrededor del eje $x$ o del eje $y$.<br>$V = \int_a^b \pi y^2 dx$, $V = \int_a^b \pi x^2 dy$. | **Consultar la guía de Matemáticas NM.** |

# Unidad 7 (tronco común): Análisis (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **7.6** | Problemas de cinemática relativos al desplazamiento, *s*, la velocidad, *v*, y la aceleración, *a*. | $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$. El área bajo la gráfica de la velocidad en función del tiempo representa el espacio recorrido. | **Consultar la guía de Matemáticas NM.** |
| **7.7** | Comportamiento de la gráfica de una función: tangentes y normales, comportamiento para valores grandes de $\lvert x \rvert$; | Se incluye: comportamiento “local” y “global”. | |
| | asíntotas. | Asíntotas oblicuas. | |
| | Importancia de la derivada segunda; distinción entre máximos y mínimos. | Uso de los términos “concavidad positiva” para $f''(x) > 0$ y “concavidad negativa” (“convexidad”) para $f''(x) < 0$. | |
| | Puntos de inflexión con pendiente nula y no nula. | En un punto de inflexión $f''(x) = 0$ y $f''(x)$ cambia de signo (cambia la concavidad de la función). $f''(x) = 0$ no es condición suficiente para que exista un punto de inflexión, por ejemplo: $y = x^4$ en $(0,0)$. | Puntos de inflexión donde $f''(x)$ no está definida, por ejemplo, $y = x^{1/3}$ en $(0,0)$.<br><br>**Consultar la guía de Matemáticas NM.** |
| **7.8** | Derivación implícita. | | |

# Unidad 7 (tronco común): Análisis (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **7.9** | Métodos de integración: | Cambio de los límites de integración en las integrales definidas. | Integración de funciones racionales utilizando la descomposición en fracciones simples. |
| | integración por sustitución; | En los exámenes: se pueden proponer sustituciones distintas de las habituales. | |
| | integración por partes. | Ejemplos: $\int x \operatorname{sen} x \, dx$ y $\int \ln x \, dx$.<br>Integración por partes aplicada varias veces de forma sucesiva;<br>ejemplos: $\int x^2 e^x \, dx$ y $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$. | Fórmulas de reducción. |
| **7.10** | Resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables. | | |

# Unidades opcionales

## Unidad 8 (opcional): Estadística y probabilidad 40 h

### Objetivos generales

Los objetivos generales de esta unidad opcional son: proporcionar a los alumnos la oportunidad de abordar la estadística de un modo práctico, alcanzar un buen nivel de comprensión de la estadística y discriminar en qué situaciones se han de aplicar e interpretar los resultados obtenidos. Se espera que las calculadoras de pantalla gráfica se utilicen ampliamente en el estudio de esta unidad opcional y, como mínimo, se exigirá que se utilicen para hallar la función densidad de probabilidad, la función densidad acumulada, la función densidad acumulada inversa, los valores del parámetro $p$ y los estadísticos de los contrastes (o tests), incluyendo los cálculos para las siguientes distribuciones: binomial, Poisson, normal, $t$ y chi-cuadrado. Se espera que los alumnos planteen el problema en forma matemática y después obtengan las respuestas con la calculadora de pantalla gráfica, indicándolo por escrito. En estas explicaciones no se debe utilizar el lenguaje específico de las calculadoras o de una marca de calculadoras determinada.

### Descripción detallada

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **8.1** | Álgebra de la probabilidad de sucesos.<br><br>Transformación lineal de una variable aleatoria unidimensional.<br><br>Media y varianza de combinaciones lineales de dos variables aleatorias independientes.<br><br>Ampliación a las combinaciones lineales de $n$ variables aleatorias independientes. | $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$;<br>$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$.<br><br>$\mathrm{E}(a_1X_1 \pm a_2X_2)=a_1\mathrm{E}(X_1)\pm a_2\mathrm{E}(X_2)$;<br>$\mathrm{Var}(a_1X_1 \pm a_2X_2)=a_1^2\mathrm{Var}(X_1)+a_2^2\mathrm{Var}(X_2)$. | |

# Unidad 8 (opcional): Estadística y probabilidad (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **8.2** | Funciones de distribución acumulada. | | Demostración formal de las medias y las varianzas. |
| | Distribuciones discretas: uniforme, Bernoulli, binomial, binomial negativa, Poisson, geométrica, hipergeométrica. | Funciones de probabilidad generales, medias y varianzas. | |
| | Distribuciones continuas: uniforme, exponencial, normal. | Funciones densidad de probabilidad, medias y varianzas. | |
| **8.3** | Distribución de la media muestral. | | Muestreo sin reposición. |
| | Distribución de combinaciones lineales de variables aleatorias independientes. En concreto $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow \bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. | Una combinación lineal de variables aleatorias independientes normalmente distribuidas también está normalmente distribuida. | |
| | Teorema central del límite. | | Demostración del teorema central del límite. |
| | Aproximación por la normal de la proporción de éxitos en una muestra grande. | Ampliación de estos resultados para muestras grandes a distribuciones que no son normales, utilizando el teorema central del límite. | Distribuciones que no satisfacen el teorema central del límite. |

# Unidad 8 (opcional): Estadística y probabilidad (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **8.4** | Cálculo de intervalos de confianza para la media de una población.<br><br>Cálculo de intervalos de confianza para la proporción de éxitos en una población. | Uso de la distribución normal cuando $\sigma$ es conocida y de la distribución $t$ cuando $\sigma$ es desconocida (con independencia del tamaño de la muestra). El caso de muestras bidimensionales podría ser contrastado como ejemplo de una técnica de muestreo unidimensional. | Diferencias de medias y diferencias de proporciones. |
| **8.5** | Contrastes de significación para la media. Contrastes de significación para la proporción.<br><br>Hipótesis nula y alternativa $H_0$ y $H_1$.<br><br>Errores de tipo I y de tipo II.<br><br>Niveles de significación; región crítica, valores críticos, valores del parámetro $p$; contrastes de una y de dos colas. | Uso de la distribución normal cuando $\sigma$ es conocida y de la distribución $t$ cuando $\sigma$ es desconocida. El caso de muestras bidimensionales podría ser contrastado como ejemplo de una técnica de muestreo unidimensional. | Diferencias de medias y diferencias de proporciones. |

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **8.6** | La distribución chi-cuadrado: grados de libertad, $\nu$ .<br><br>El estadístico $\chi^2$ , $\chi^2_{calc} = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ .<br><br>El test $\chi^2$ para la bondad del ajuste.<br><br>Tablas de contingencia: el test $\chi^2$ para la independencia de dos variables. | Concepto de que $\chi^2_{calc}$ es una medida de la discrepancia existente entre las frecuencias observadas y esperadas.<br><br>Test para la bondad del ajuste mediante las distribuciones anteriores; el requisito de combinar clases con frecuencias esperadas menores que 5. | Corrección de Yates a la continuidad para $\nu = 1$ . |

# Unidad 9 (opcional): Conjuntos, relaciones y grupos 40 h

## Objetivos generales

Los objetivos generales de esta unidad opcional son proporcionar la oportunidad de estudiar importantes conceptos matemáticos e introducir los principios de la demostración a través del álgebra abstracta.

## Descripción detallada

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **9.1** | Conjuntos finitos e infinitos. Subconjuntos. Operaciones con conjuntos: unión; intersección; conjunto complementario, diferencia de conjuntos, diferencia simétrica. | | |
| | Leyes de de Morgan; propiedades distributiva, asociativa y conmutativa (para la unión y la intersección). | Ilustración de estas propiedades mediante diagramas de Venn. | Demostración de estas propiedades. |
| **9.2** | Pares ordenados: producto cartesiano de dos conjuntos. | | |
| | Relaciones; relaciones de equivalencia; clases de equivalencia. | Una relación de equivalencia en un conjunto induce una partición en el mismo. | |
| **9.3** | Aplicaciones: inyectivas; sobreyectivas; biyectivas. | El término codominio. | |
| | Composición de aplicaciones y aplicaciones inversas. | Concepto de que la composición de aplicaciones no es una operación conmutativa y que si $f$ es una aplicación biyectiva del conjunto $A$ en el conjunto $B$ entonces existe $f^{-1}$ y es una aplicación biyectiva del conjunto $B$ en el conjunto $A$. | |

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **9.4** | Operaciones binarias.<br><br><br><br><br><br><br><br>Tablas de operaciones (tablas de Cayley). | Una operación binaria $*$ sobre un conjunto no vacío $S$ es una regla que asocia a cada dos elementos cualesquiera $a,\ b \in S$ un único elemento $c$. Es decir, en esta definición, una operación binaria no es necesariamente cerrada.<br><br>En los exámenes: se puede pedir a los alumnos que comprueben si una operación dada satisface la condición de ser cerrada.<br><br>Tablas de operaciones con la propiedad del cuadrado latino (ningún elemento aparece dos veces en una misma fila o en una misma columna). | |
| **9.5** | Operaciones binarias que verifican las propiedades asociativa, distributiva y conmutativa. | Operaciones aritméticas en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$; operaciones con matrices. | |
| **9.6** | El elemento neutro $e$.<br><br>El simétrico $a^{-1}$ de un elemento $a$.<br><br>Demostración de que se puede eliminar un elemento $a$ por la izquierda o por la derecha, siempre que $a$ tenga simétrico.<br><br>Demostración de la unicidad de los elementos neutro y simétrico. | Para que $e$ sea elemento neutro lo ha de ser por la derecha $a * e = a$ y por la izquierda $e * a = a$.<br><br>Lo ha de ser por la derecha $a * a^{-1} = e$ y por la izquierda $a^{-1} * a = e$. | |

# Unidad 9 (opcional): Conjuntos, relaciones y grupos (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **9.7** | Axiomas de grupo $\{G,*\}$. | El conjunto $G$ para una operación dada $*$ verifica:<br>• $G$ es cerrado para $*$<br>• $*$ es asociativa<br>• $G$ posee elemento neutro<br>• para todo elemento de $G$ existe un simétrico. | |
| | Grupos abelianos. | $a*b=b*a$, para todo $a,b\in G$. | |
| **9.8** | Los grupos:<br>• $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{C}$ para la adición<br>• matrices del mismo orden para la adición<br>• matrices regulares de orden $2\times 2$ para la multiplicación<br>• enteros para la adición módulo $n$ | | |
| | • grupo de las transformaciones | La notación $T_1T_2$ para la composición significa $T_2$ seguida de $T_1$. | |
| | • simetrías de un triángulo equilátero, de un rectángulo y de un cuadrado<br>• aplicaciones biyectivas para la composición de aplicaciones | | |
| | • permutaciones para la composición. | En los exámenes: se utilizará la notación $p=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ para representar la aplicación $1\to 3$, $2\to 1$, $3\to 2$. | |

# Unidad 9 (opcional): Conjuntos, relaciones y grupos (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **9.9** | Grupos finitos e infinitos.<br><br>Orden de un elemento del grupo y orden del grupo. | Propiedad del cuadrado latino de la tabla de un grupo. | |
| **9.10** | Grupos cíclicos.<br><br>Demostración de que todos los grupos cíclicos son abelianos. | Generadores. | |
| **9.11** | Subgrupos, subgrupos propios.<br><br>Demostración y aplicación de las condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto de un grupo sea un subgrupo.<br><br>Teorema de Lagrange.<br><br>Demostración y aplicación del resultado de que el orden de un grupo finito es divisible por el orden de cualquier elemento. (Corolario del teorema de Lagrange.) | Sea $G$ un grupo y $H$ un subconjunto no vacío de $G$. $H$ es un subgrupo de $G$ si $ab^{-1} \in H$ para todo $a, b \in H$.<br><br>Sea $G$ un grupo finito y $H$ un subconjunto no vacío de $G$. $H$ es un subgrupo de $G$ si $H$ es cerrado para la operación del grupo. | En los exámenes: no se pedirá la demostración del teorema de Lagrange. |

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **9.12** | Isomorfismo de grupos.<br><br><br><br><br>Demostración de las propiedades de los isomorfismos para el elemento neutro y los elementos simétricos. | Tanto de grupos finitos como infinitos.<br>Dos grupos $\{G,\circ\}$ y $\{H,\bullet\}$ son isomorfos si existe una aplicación biyectiva tal que $f(a\circ b)=f(a)\bullet f(b)$ para todo $a,b\in G$.<br>La función $f:G\to H$ es un isomorfismo.<br><br>Elemento neutro: sean $e_1$ y $e_2$ los elementos neutros de *G*, *H* respectivamente. Entonces $f(e_1)=e_2$.<br>Elemento simétrico: $f(a^{-1})=\left(f(a)\right)^{-1}$ para todo $a\in G$. | |

# Unidad 10 (opcional): Series y ecuaciones diferenciales 40 h

## Objetivos generales

Los objetivos generales de esta unidad opcional son la introducción de teoremas de límites y convergencia de series, así como la aplicación de resultados del análisis para resolver ecuaciones diferenciales.

## Descripción detallada

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **10.1** | Sucesiones infinitas de números reales. | | |
| | Teoremas de límites cuando $n$ tiende a infinito. | Límite de la suma, diferencia, producto, cociente; teorema del paso al límite en desigualdades. | |
| | Límite de una sucesión. | Definición formal: la sucesión $\{u_n\}$ converge al límite $L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo $N$ tal que $\lvert u_n - L\rvert < \varepsilon$ para todo $n > N$. | |
| | Integrales impropias del tipo $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. | | |
| | La integral como límite de una suma; sumas superiores e inferiores. | | |

## Unidad 10 (opcional): Series y ecuaciones diferenciales (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **10.2** | Convergencia de series infinitas. | La suma de una serie es el límite de la sucesión de sus sumas parciales. | |
| | Fracciones simples y series telescópicas (método de las diferencias). | Cuando la descomposición de los denominadores tiene únicamente factores lineales. | |
| | Criterios de convergencia: criterio de comparación; criterio de comparación del límite; criterio de D'Alembert; criterio de la integral de Cauchy. | Los alumnos han de saber que si $\lim_{x\to\infty} x_n = 0$ entonces la serie no es necesariamente convergente, pero si $\lim_{x\to\infty} x_n \neq 0$ la serie es divergente. | |
| | Las series-*p*, $\sum \frac{1}{n^p}$. | $\sum \frac{1}{n^p}$ es convergente para $p > 1$ y divergente en los demás casos. Si $p = 1$, la serie se llama armónica. | |
| | Cálculo de la suma de una serie mediante integrales. | | |
| **10.3** | Series absolutamente convergentes. | | |
| | Series condicionalmente convergentes. | | |
| | Series alternadas. | Condiciones de convergencia. El valor absoluto del error cometido al aproximar la suma de la serie por una suma parcial es menor que el siguiente término de la serie. | |

# Unidad 10 (opcional): Series y ecuaciones diferenciales (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **10.4** | Series de potencias: radio de convergencia e intervalo de convergencia. Determinación del radio de convergencia por el criterio de D'Alembert. | | |
| **10.5** | Polinomios de Taylor y series de Taylor, incluyendo el término complementario (resto). | Aplicaciones a la aproximación de funciones; fórmulas del término complementario: en función del valor de la derivada de orden $(n+1)$ en un punto intermedio, y en función de una integral de la derivada de orden $(n+1)$. | Demostración del teorema de Taylor. |
| | | Derivación e integración de series (válido únicamente en el intervalo de convergencia de la serie inicial). | Obtención de nuevas series mediante productos y cocientes. |
| | Desarrollo en serie de Maclaurin de $\mathrm{e}^x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$. Obtención de otras series mediante sustitución. | Intervalos de convergencia para estas series de Maclaurin.<br>Ejemplo: $\mathrm{e}^{x^2}$. | |
| | Cálculo de límites de la forma $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ mediante la regla de L'Hôpital o el desarrollo en serie de Taylor. | Casos en que las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$ se anulan para $x=a$. | Demostración de la regla de L'Hôpital. |

# Unidad 10 (opcional): Series y ecuaciones diferenciales (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **10.6** | Ecuaciones diferenciales de primer orden: interpretación geométrica mediante campos de direcciones;<br><br>resolución numérica de $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ por el método de Euler.<br><br>Ecuaciones diferenciales homogéneas, aplicación de la sustitución $y = vx$.<br><br>Resolución de $y' + P(x)y = Q(x)$, mediante el factor integrante. | <br><br><br>$y_{n+1} = y_n + h \times f(x_n, y_n)$; $x_{n+1} = x_n + h$, donde $h$ es una constante. | |

# Unidad 11 (opcional): Matemática discreta 40 h

## Objetivos generales

El objetivo general de esta unidad opcional es proporcionar a los alumnos la oportunidad de interesarse por el razonamiento lógico, el pensamiento algorítmico y sus aplicaciones.

## Descripción detallada

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **11.1** | La división y los algoritmos de Euclides.<br><br>El máximo común divisor, $\mathrm{mcd}(a,b)$, y el mínimo común múltiplo, $\mathrm{mcm}(a,b)$, de dos números enteros *a* y *b*.<br><br>Números primos entre sí; números primos y teorema fundamental de la aritmética. | El teorema $a \mid b$ y $a \mid c \Rightarrow a \mid (bx \pm cy)$ donde $x, y \in \mathbb{Z}$.<br><br>El algoritmo de la división $a = bq + r$, $0 \le r < b$.<br><br>El algoritmo de Euclides para determinar el máximo común divisor de dos números enteros. | Demostración del teorema fundamental de la aritmética. |
| **11.2** | Representación de números enteros en distintas bases. | En los exámenes: no es probable que se planteen preguntas más allá de la base 16. | |
| **11.3** | Ecuaciones diofánticas lineales $ax + by = c$. | Soluciones generales y soluciones sujetas a restricciones. Por ejemplo, todas las soluciones han de ser positivas. | |
| **11.4** | Aritmética modular. Congruencias lineales. Teorema chino del resto. | | |

# Unidad 11 (opcional): Matemática discreta (continuación)

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **11.5** | Teorema de Fermat. | $a^p \equiv a(\mathrm{mod}\ p)$ donde $p$ es primo. | En los exámenes: no se pedirá la demostración del teorema. |
| **11.6** | Grafos, vértices, aristas. Vértices adyacentes, aristas adyacentes.<br><br>Grafos simples; grafos conexos; grafos completos; multigrafos; grafos bipartidos; grafos planarios; árboles; grafos ponderados.<br>Subgrafos; grafos complementarios.<br><br>Isomorfismo de grafos. | Dos vértices son adyacentes si están unidos por una arista. Dos aristas son adyacentes si tienen un vértice común.<br><br>Relación de Euler: $v - e + f = 2$; teoremas de grafos planarios incluyendo $e \le 3v - 6$, $e \le 2v - 4$, $\kappa_5$ y $\kappa_{3,3}$ no son planarios.<br><br>Únicamente grafos simples para el isomorfismo. | |
| **11.7** | Recorridos, senderos, caminos, circuitos, ciclos.<br>Caminos y ciclos hamiltonianos; senderos y circuitos eulerianos. | Un grafo conexo contiene un circuito euleriano si y sólo si todos los vértices del grafo son de grado par. | Teorema de Dirac para ciclos hamiltonianos. |
| **11.8** | Matriz de adyacencia.<br><br>Matriz de adyacencia de costos. | Aplicaciones a los isomorfismos y aplicaciones de las potencias de la matriz de adyacencia al número de recorridos. | |
| **11.9** | Algoritmos de grafos: de Prim; de Kruskal; de Dijkstra. | Estos son ejemplos de algoritmos “potentes”. | |

| | Contenidos | Ampliaciones/inclusiones | Exclusiones |
|---|---|---|---|
| **11.10** | El problema del “cartero chino” (“análisis de rutas”).<br><br>El problema del “viajante”.<br><br>Algoritmos para determinar los límites superior e inferior del problema del viajante. | Para determinar la ruta más corta en un grafo ponderado pasando al menos una vez por cada arista (algoritmo de análisis de rutas).<br><br>Para determinar el ciclo hamiltoniano de menos peso en un grafo completo ponderado. | Grafos con más de dos vértices de grado impar.<br><br>Grafos en los que no se verifica la inecuación del triángulo. |

# Glosario de términos para la unidad opcional de matemática discreta

## Introducción

Profesores y alumnos han de tener en cuenta que existen diversas terminologías en teoría de grafos y que cada libro de texto puede emplear distintas combinaciones de las mismas. Algunos ejemplos son: vértice/ nodo/ confluencia/ punto; arista/ ruta/ arco; grado de un vértice/ orden; aristas múltiples/ aristas paralelas; lazo/ bucle.

En las preguntas de examen de IBO, se utilizará la terminología que aparece en el programa de estudios. Para mayor claridad se definen a continuación estos términos.

## Términos

| | |
|---|---|
| *Grafo* | Consta de un conjunto de vértices y un conjunto de aristas; una arista conecta sus extremos (vértices). |
| *Subgrafo* | Un grafo dentro de otro grafo. |
| *Grafo ponderado* | Un grafo en el que a cada arista se le asigna un número o peso. |
| *Lazo* | Una arista cuyos extremos están unidos al mismo vértice. |
| *Aristas múltiples* | Ocurre cuando más de una arista conecta el mismo par de vértices. |
| *Recorrido* | Una sucesión de aristas enlazadas. |
| *Sendero* | Un recorrido en el que ninguna arista aparece más de una vez. |
| *Camino* | Un recorrido sin vértices repetidos. |
| *Circuito* | Un recorrido que empieza y termina en el mismo vértice y que no tiene aristas repetidas. |
| *Ciclo* | Un recorrido que empieza y termina en el mismo vértice y que no tiene más vértices repetidos. |
| *Camino hamiltoniano* | Un camino que contiene todos los vértices del grafo. |
| *Ciclo hamiltoniano* | Un ciclo que contiene todos los vértices del grafo. |
| *Sendero euleriano* | Un sendero que contiene todas las aristas de un grafo. |
| *Circuito euleriano* | Un circuito que contiene todas las aristas de un grafo. |
| *Grado de un vértice* | Número de aristas conectadas al vértice; un lazo cuenta como dos, una por cada extremo. |
| *Grafo simple* | Un grafo sin lazos ni aristas múltiples. |
| *Grafo completo* | Un grafo simple donde cada vértice está conectado a todos los otros vértices. |

| | |
|---|---|
| *Grafo conexo* | Un grafo tal que para cada par de vértices existe un camino que los conecta. |
| *Grafo inconexo* | Un grafo tal que existe al menos un par de vértices que no están conectados por un camino. |
| *Árbol* | Un grafo conexo que no contiene ciclos. |
| *Árbol ponderado* | Un árbol en el que a cada arista se le asigna un número o peso. |
| *Árbol generador de un grafo* | Un subgrafo que contiene todos los vértices del grafo, y que además es un árbol. |
| *Árbol generador minimal* | Un árbol generador de un grafo ponderado que tiene un peso total mínimo. |
| *Complementario de un grafo G* | Un grafo que tiene los mismos vértices que $G$, pero tal que entre cada dos vértices existe una arista si y sólo si no existe en $G$. |
| *Isomorfismo de grafos entre dos grafos simples G y H* | Una biyección entre los vértices de $G$ y de $H$ tal que dos vértices en $G$ son adyacentes si y sólo si los dos vértices correspondientes de $H$ son adyacentes. |
| *Grafo planario* | Un grafo que puede representarse sobre un plano de una manera tal que ninguna arista corte otra arista. |
| *Grafo bipartido* | Un grafo que admite una partición de sus vértices en dos conjuntos de modo que las aristas unen siempre un vértice de un conjunto con un vértice del otro conjunto. |
| *Grafo bipartido completo* | Un grafo bipartido en el cual cada uno de los vértices de un conjunto está conectado a todos los vértices del otro conjunto. |
| *Matriz de adyacencia de G, que se denota por* $\boldsymbol{A_G}$ | La matriz de adyacencia, $\boldsymbol{A_G}$, de un grafo $G$ con $n$ vértices es la matriz $n \times n$ tal que la entrada correspondiente a la fila $i$ y la columna $j$ es el número de aristas que unen los vértices $i$ y $j$. Por tanto, la matriz de adyacencia es simétrica respecto a la diagonal. |
| *Matriz de adyacencia de costos de G, que se denota por* $\boldsymbol{C_G}$ | La matriz de adyacencia de costos, $\boldsymbol{C_G}$, de un grafo $G$ con $n$ vértices es la matriz $n \times n$ tal que la entrada correspondiente a la fila $i$ y la columna $j$ es el peso de las aristas que unen los vértices $i$ y $j$. |

# RESUMEN DE LA EVALUACIÓN

*Primeros exámenes: 2008*

## Matemáticas NS

## Evaluación externa 5 h 80%

### Exámenes escritos

### Prueba 1 2 h 30%

No se permite el uso de calculadoras.

Sección A 15%

Preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con las unidades obligatorias del tronco común del programa de estudios

Sección B 15%

Preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con las unidades obligatorias del tronco común del programa de estudios

### Prueba 2 2 h 30%

Se requiere el uso de calculadoras de pantalla gráfica.

Sección A 15%

Preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con las unidades obligatorias del tronco común del programa de estudios

Sección B 15%

Preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con las unidades obligatorias del tronco común del programa de estudios

### Prueba 3 1 h 20%

Se requiere el uso de calculadoras de pantalla gráfica.

Preguntas de respuesta larga fundamentalmente relacionadas con las unidades opcionales del programa de estudios

# Evaluación interna 20%

## Carpeta

Un conjunto de dos trabajos que asigna el profesor y realiza el alumno durante el curso. Los trabajos deben estar basados en distintas áreas del programa de estudios y reflejar los dos tipos de tarea siguientes:

- investigación matemática
- utilización de modelos matemáticos.

La carpeta la evalúa internamente el profesor y la modera externamente IBO. Los procedimientos se explican en el *Vademécum*.

# DESCRIPCIÓN DETALLADA DE LA EVALUACIÓN

## Descripción detallada de la evaluación externa 5 h 80%

### Generalidades

#### Prueba 1, prueba 2 y prueba 3

Estas pruebas las establece y evalúa IBO. En total, representan el 80% de la nota final del curso. Están diseñadas para que los alumnos puedan demostrar lo que saben y son capaces de hacer.

### Calculadoras

#### Prueba 1

No se permite a los alumnos disponer de ninguna calculadora. En las preguntas se les pedirá principalmente que adopten un enfoque analítico para llegar a las soluciones, en lugar de que usen calculadoras de pantalla gráfica. La prueba no requerirá cálculos complicados que puedan llevar a cometer errores por descuido. No obstante, las preguntas implicarán realizar operaciones aritméticas cuando éstas sean esenciales para su desarrollo.

#### Pruebas 2 y 3

Los alumnos deben disponer de una calculadora de pantalla gráfica en todo momento. No obstante, no todas las preguntas requerirán necesariamente el uso de calculadoras de pantalla gráfica. Cada año se publica en el *Vademécum* información sobre las calculadoras de pantalla gráfica permitidas.

### Cuadernillo de información de Matemáticas NS

Todos los alumnos deben poder disponer de un ejemplar sin anotaciones del cuadernillo de información durante el examen.

### Calificación

Se asignan puntos por método, precisión, respuestas correctas y razonamiento, lo cual incluye interpretación.

En las pruebas 1, 2 y 3, las respuestas correctas que no presentan por escrito el procedimiento realizado no siempre reciben la puntuación máxima. Las respuestas se deben justificar mediante el procedimiento seguido o las explicaciones correspondientes (por ejemplo, en forma de diagramas, gráficas o cálculos). Aun cuando una respuesta sea incorrecta, se pueden otorgar algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Por lo tanto, se debe recomendar a los alumnos que muestren todos los procedimientos utilizados.

# Prueba 1 2 h 30%

Esta prueba consta de una sección A con preguntas de respuesta corta y una sección B con preguntas de respuesta larga. Cada sección representa un 15% de la nota total.

## Parte del programa que cubre la prueba

- Para esta prueba se requiere el conocimiento de **todas** las unidades del tronco común del programa de estudios. Sin embargo, esto no significa que todos los temas se vayan a evaluar en cada convocatoria de examen.

## Calificación

- Esta prueba se califica con un máximo de **120** puntos y representa el **30%** de la nota final.
- Las preguntas de esta prueba pueden no ser equivalentes en cuanto a su extensión y nivel de dificultad. Así pues, cada una de ellas no necesariamente se califica con el mismo número de puntos. La puntuación máxima de cada pregunta se indica al principio de la misma.

### Sección A

Esta sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con las unidades del tronco común del programa de estudios. Se califica con un máximo de 60 puntos y representa el 15% de la nota final.

- La finalidad de esta sección es comprobar la amplitud de los conocimientos de los alumnos sobre las unidades del tronco común. No obstante, no se debe suponer que se vaya a dar la misma importancia a todos los temas.

### Tipo de preguntas

- Para resolver cada pregunta será necesario un pequeño número de pasos.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de éstos.

### Sección B

Esta sección consta de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con las unidades del tronco común del programa de estudios. Se califica con un máximo de 60 puntos y representa el 15% de la nota final.

- Una misma pregunta puede implicar conocimientos de más de un tema del tronco común.
- La finalidad de esta sección es comprobar la amplitud los conocimientos de los alumnos sobre las unidades del tronco común. Puede abarcar menos temas que la sección A.
- Para cubrir el temario de forma adecuada, algunas preguntas de esta prueba pueden incluir dos o más apartados no relacionados entre sí. Cuando esto ocurra, dichos apartados vendrán claramente rotulados en este sentido.

### Tipo de preguntas

- Las preguntas requieren respuestas largas que implican razonamientos sólidos.
- Cada pregunta puede desarrollar una única cuestión o estar dividida en apartados no relacionados entre sí.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de éstos.

- En general, cada pregunta presenta una escala de dificultad que va de cuestiones relativamente fáciles al principio, a otras relativamente más difíciles al final. Se pone especial énfasis en la resolución de problemas.

# Prueba 2 2 h 30%

Esta prueba consta de una sección A con preguntas de respuesta corta y una sección B con preguntas de respuesta larga. Cada sección representa un 15% de la nota total.

## Parte del programa que cubre la prueba

- Para esta prueba se requiere el conocimiento de **todas** las unidades del tronco común del programa de estudios. Sin embargo, esto no significa que todos los temas se vayan a evaluar en cada convocatoria de examen.

## Calificación

- Esta prueba se califica con un máximo de **120** puntos y representa el **30%** de la nota final.
- Las preguntas de esta prueba pueden variar en cuanto a su extensión y nivel de dificultad. Así pues, cada una de ellas no necesariamente se califica con la misma puntuación. La puntuación máxima de cada pregunta se indica al principio de la misma.

### Sección A

Esta sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con las unidades del tronco común del programa de estudios. Se califica con un máximo de 60 puntos y representa el 15% de la nota final.

- La finalidad de esta sección es comprobar la amplitud de los conocimientos de los alumnos sobre las unidades del tronco común. No obstante, no se debe suponer que se vaya a dar la misma importancia a todos los temas.

### Tipo de preguntas

- Para resolver cada pregunta será necesario un pequeño número de pasos.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de éstos.

### Sección B

Esta sección consta de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con las unidades del tronco común del programa de estudios. Se califica con un máximo de 60 puntos y representa el 15% de la nota final.

- Una misma pregunta puede implicar conocimientos de más de un tema del tronco común.
- La finalidad de esta sección es comprobar la profundidad de los conocimientos de los alumnos sobre las unidades del tronco común. Puede abarcar menos temas que la sección A.
- Para cubrir el temario de forma adecuada, algunas preguntas de esta prueba pueden incluir dos o más apartados no relacionados entre sí. Cuando esto ocurra, dichos apartados vendrán claramente rotulados en este sentido.

### Tipo de preguntas

- Las preguntas requieren respuestas largas que implican razonamientos sólidos.
- Cada pregunta puede desarrollar una única cuestión o estar dividida en apartados no relacionados entre sí.

- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de éstos.
- En general, cada pregunta presenta una escala de dificultad que va de cuestiones relativamente fáciles al principio, a otras relativamente más difíciles al final. Se pone especial énfasis en la resolución de problemas.

# Prueba 3 1 h 20%

Esta prueba consta de cuatro secciones, una para cada unidad opcional del programa de estudios. Cada sección se compone de un pequeño número de preguntas de respuesta larga relacionadas fundamentalmente con la unidad opcional correspondiente. Siempre que sea posible, el primer apartado de cada sección se referirá a los contenidos del tronco común que se relacionan con la unidad opcional. Cuando no pueda ser así, como por ejemplo en el caso de la unidad opcional sobre matemática discreta, el nivel de dificultad del primer apartado de la pregunta será equivalente al de las preguntas del tronco común.

Los alumnos deben responder solamente a las preguntas de una unidad opcional y han de responder a todas las preguntas de la sección elegida.

## Parte del programa que cubre la prueba

- Los alumnos deben responder a todas las preguntas relacionadas con la unidad opcional que han estudiado.
- Para esta prueba se requiere el conocimiento de todos los contenidos de la unidad opcional estudiada y también de los contenidos del tronco común.

### Tipo de preguntas

- Las preguntas requieren respuestas largas que implican razonamientos sólidos.
- Cada pregunta puede desarrollar una única cuestión o estar dividida en apartados no relacionados entre sí. Cuando esto ocurra, dichos apartados vendrán claramente rotulados en este sentido.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de éstos.
- En general, cada pregunta presenta una escala de dificultad que va de cuestiones relativamente fáciles al principio, a otras relativamente más difíciles al final. Se pone especial énfasis en la resolución de problemas.

## Calificación

- Esta prueba se califica con un máximo de **60** puntos y representa el **20%** de la nota final. Se asignan aproximadamente **15** puntos a los contenidos del tronco común (o ejercicios de nivel equivalente).
- Las preguntas de esta prueba pueden no ser equivalentes en cuanto a su extensión y nivel de dificultad. Así pues, cada una de ellas no necesariamente se califica con el mismo número de puntos. La puntuación máxima de cada pregunta se indica al principio de la misma. Todas las secciones se califican con un máximo de **60** puntos y el nivel de dificultad general ha de ser el mismo en cada una de ellas.

# Pautas generales

## Notación

Entre los diversos tipos de notación usuales, IBO ha decidido adoptar un sistema que sigue las recomendaciones de la Organización Internacional de Normalización (ISO). Esta notación se utiliza en las pruebas de exámenes de este curso sin explicaciones. Si en una prueba de examen determinada se utilizasen otras formas de notación no contenidas en esta guía, éstas vendrían definidas dentro de la pregunta donde aparezcan.

Puesto que los alumnos deben reconocer, aunque no necesariamente utilizar, la notación del BI empleada en los exámenes, se recomienda que los profesores la introduzcan lo antes posible. Durante los exámenes **no** está permitido consultar esta notación.

En un número limitado de casos, es posible que los alumnos necesiten emplear otras formas de notación en sus respuestas escritas. Esto se debe a que no todas las formas de notación de IBO pueden transcribirse directamente en forma manuscrita. Para los vectores, concretamente, IBO utiliza un tipo de imprenta en negrita y cursiva que no puede transcribirse de forma adecuada al escribir a mano. En este caso, los profesores deben aconsejar a los alumnos que utilicen formas alternativas de notación en sus trabajos (por ejemplo, $\vec{x}$, $\bar{x}$ o $\underline{x}$).

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta y no la propia de las calculadoras.

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | conjunto de los números enteros positivos y el cero, $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ |
| $\mathbb{Z}$ | conjunto de los números enteros, $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ |
| $\mathbb{Z}^+$ | conjunto de los números enteros positivos, $\{1, 2, 3, ...\}$ |
| $\mathbb{Q}$ | conjunto de los números racionales |
| $\mathbb{Q}^+$ | conjunto de los números racionales positivos, $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$ |
| $\mathbb{R}$ | conjunto de los números reales |
| $\mathbb{R}^+$ | conjunto de los números reales positivos, $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ |
| $\mathbb{C}$ | conjunto de los números complejos, $\{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ |
| $\mathrm{i}$ | $\sqrt{-1}$ |
| $z$ | número complejo |
| $z^*$ | número complejo conjugado de $z$ |
| $\lvert z \rvert$ | módulo de $z$ |
| $\arg z$ | argumento de $z$ |
| $\mathrm{Re}\, z$ | parte real de $z$ |
| $\mathrm{Im}\, z$ | parte imaginaria de $z$ |

| | |
|---|---|
| $\{x_1, x_2, ...\}$ | conjunto de los elementos $x_1, x_2, ...$ |
| $n(A)$ | número de elementos del conjunto finito $A$ |
| $\{x \mid \quad \}$ | conjunto de todos los elementos $x$, tales que |
| $\in$ | es un elemento de/pertenece a |
| $\notin$ | no es un elemento de/no pertenece a |
| $\varnothing$ | conjunto vacío |
| $U$ | conjunto universal |
| $\cup$ | unión |
| $\cap$ | intersección |
| $\subset$ | es un subconjunto propio de |
| $\subseteq$ | es un subconjunto de/está contenido en |
| $A'$ | conjunto complementario del conjunto $A$ |
| $A \times B$ | producto cartesiano de los conjuntos $A$ y $B$ (es decir, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, \ b \in B\}$ ) |
| $a \mid b$ | $a$ divide a $b$ |
| $a^{1/n}$, $\sqrt[n]{a}$ | $a$ elevado a $\frac{1}{n}$, raíz $n$-ésima (enésima) de $a$ (si $a \geq 0$ entonces $\sqrt[n]{a} \geq 0$ ) |
| $a^{1/2}$, $\sqrt{a}$ | $a$ elevado a $\frac{1}{2}$, raíz cuadrada de $a$ (si $a \geq 0$ entonces $\sqrt{a} \geq 0$ ) |
| $\lvert x \rvert$ | el módulo o valor absoluto de $x$, es decir $\begin{cases} x \text{ para } x \geq 0, \ x \in \mathbb{R} \\ -x \text{ para } x < 0, \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ |
| $\equiv$ | identidad |
| $\approx$ | es aproximadamente igual a |
| $>$ | es mayor que |
| $\geq$ | es mayor o igual que |
| $<$ | es menor que |
| $\leq$ | es menor o igual que |
| $\ngtr$ | no es mayor que |

| | |
|---|---|
| $\nless$ | no es menor que |
| $[a, b]$ | el intervalo cerrado $a \le x \le b$ |
| $]a, b[$ | el intervalo abierto $a < x < b$ |
| $u_n$ | término $n$-ésimo (enésimo) de una sucesión o de una serie |
| $d$ | diferencia común de una progresión aritmética |
| $r$ | razón común de una progresión geométrica |
| $S_n$ | suma de los $n$ primeros términos de una sucesión, $u_1 + u_2 + ... + u_n$ |
| $S_\infty$ | suma de los infinitos términos de una sucesión, $u_1 + u_2 + ...$ |
| $\sum_{i=1}^{n} u_i$ | $u_1 + u_2 + ... + u_n$ |
| $\prod_{i=1}^{n} u_i$ | $u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$ |
| $\binom{n}{r}$ | $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ |
| $f : A \to B$ | $f$ es una función que asigna a cada elemento del conjunto $A$ una imagen en el conjunto $B$ |
| $f : x \mapsto y$ | $f$ es una función que aplica $x$ en $y$ |
| $f(x)$ | imagen de $x$ por la función $f$ |
| $f^{-1}$ | función inversa de la función $f$ |
| $f \circ g$ | función compuesta de $f$ y $g$ |
| $\lim_{x \to a} f(x)$ | límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$ |
| $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ | derivada de $y$ con respecto a $x$ |
| $f'(x)$ | derivada de $f(x)$ con respecto a $x$ |
| $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ | derivada segunda de $y$ con respecto a $x$ |
| $f''(x)$ | derivada segunda de $f(x)$ con respecto a $x$ |

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ | derivada de orden $n$ ($n$-ésima) de $y$ con respecto a $x$ |
| $f^{(n)}(x)$ | derivada de orden $n$ ($n$-ésima) de $f(x)$ con respecto a $x$ |
| $\int y\,\mathrm{d}x$ | integral indefinida de $y$ con respecto a $x$ |
| $\int_a^b y\,\mathrm{d}x$ | integral definida de $y$ con respecto a $x$ entre los límites $x = a$ y $x = b$ |
| $\mathrm{e}^x$ | función exponencial de $x$ |
| $\log_a x$ | logaritmo en base $a$ de $x$ |
| $\ln x$ | logaritmo neperiano de $x$, $\log_{\mathrm{e}} x$ |
| sen, cos, tg | funciones trigonométricas (circulares) |
| $\left.\begin{array}{l}\text{arcsen, arccos}\\ \text{arctg}\end{array}\right\}$ | funciones circulares inversas |
| cosec, sec, cotg | funciones circulares recíprocas (o cofunciones) |
| $\mathrm{A}(x, y)$ | punto A del plano, de coordenadas cartesianas $x$ e $y$ |
| $[\mathrm{AB}]$ | segmento de recta con extremos en los puntos A y B |
| AB | longitud de $[\mathrm{AB}]$ |
| $(\mathrm{AB})$ | recta que pasa por los puntos A y B |
| $\hat{A}$ | ángulo de vértice A |
| $\mathrm{C\hat{A}B}$ | ángulo formado por $[\mathrm{CA}]$ y $[\mathrm{AB}]$ |
| $\Delta\mathrm{ABC}$ | triángulo de vértices A, B y C |
| $\boldsymbol{v}$ | vector $\boldsymbol{v}$ |
| $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ | vector definido en módulo, dirección y sentido por el segmento de recta orientado de A a B |
| $\boldsymbol{a}$ | vector de posición $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ |
| $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ | vectores unitarios en las direcciones de los ejes de coordenadas cartesianos |
| $\lvert\boldsymbol{a}\rvert$ | módulo de $\boldsymbol{a}$ |
| $\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rvert$ | módulo de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ |

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ | producto escalar de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ |
| $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ | producto vectorial de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ |
| $\boldsymbol{A}^{-1}$ | inversa de la matriz no singular $\boldsymbol{A}$ |
| $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ | traspuesta de la matriz $\boldsymbol{A}$ |
| $\det \boldsymbol{A}$ | determinante de la matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ |
| $\boldsymbol{I}$ | matriz identidad |
| $\mathrm{P}(A)$ | probabilidad del suceso $A$ |
| $\mathrm{P}(A')$ | probabilidad del suceso “no $A$” |
| $\mathrm{P}(A \mid B)$ | probabilidad del suceso $A$ condicionado al suceso $B$ |
| $x_1, x_2, ...$ | valores observados |
| $f_1, f_2, ...$ | frecuencias con que ocurren los valores observados $x_1, x_2, ...$ |
| $\mathrm{P}_x$ | función de distribución de probabilidad $\mathrm{P}(X = x)$ de la variable aleatoria discreta $X$ |
| $f(x)$ | función densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua $X$ |
| $F(x)$ | función de distribución acumulada de la variable aleatoria continua $X$ |
| $\mathrm{E}(X)$ | esperanza matemática de la variable aleatoria $X$ |
| $\mathrm{Var}(X)$ | varianza de la variable aleatoria $X$ |
| $\mu$ | media de la población |
| $\sigma^2$ | varianza de la población, $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \mu)^2}{n}$, donde $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$ |
| $\sigma$ | desviación típica de la población |
| $\overline{x}$ | media muestral |
| $s_n^2$ | varianza muestral, $s_n^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{x})^2}{n}$, donde $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$ |
| $s_n$ | desviación típica de la muestra |

| | |
|---|---|
| $s_{n-1}^2$ | estimación sin sesgo de la varianza de la población, $s_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1}s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$ , donde $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$ |
| $\mathrm{B}(n,\ p)$ | distribución binomial de parámetros *n* y *p* |
| $\mathrm{Po}(m)$ | distribución de Poisson de media *m* |
| $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ | distribución normal de media $\mu$ y varianza $\sigma^2$ |
| $X \sim \mathrm{B}(n, p)$ | la variable aleatoria *X* tiene una distribución binomial de parámetros *n* y *p* |
| $X \sim \mathrm{Po}(m)$ | la variable aleatoria *X* tiene una distribución de Poisson de media *m* |
| $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ | la variable aleatoria *X* tiene una distribución normal de media $\mu$ y varianza $\sigma^2$ |
| $\Phi$ | función de distribución acumulada de la variable normal tipificada o estandarizada con distribución $\mathrm{N}(0,1)$ |
| $\nu$ | número de grados de libertad |
| $\chi^2$ | distribución chi-cuadrado |
| $\chi_{calc}^2$ | el estadístico del test de chi-cuadrado, donde $\chi_{calc}^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ |
| $A \setminus B$ | diferencia de los conjuntos *A* y *B* (es decir, $A \setminus B = A \cap B' = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$ ) |
| $A \Delta B$ | diferencia simétrica de los conjuntos *A* y *B* (es decir, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ) |
| $\kappa_n$ | grafo completo con *n* vértices |
| $\kappa_{n,m}$ | grafo bipartito completo con un conjunto de *n* vértices y otro conjunto de *m* vértices |
| $\mathrm{Z}_p$ | conjunto de las clases de equivalencia $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ de los enteros módulo *p* |
| $\mathrm{mcd}(a,b)$ | máximo común divisor de los enteros *a* y *b* |
| $\mathrm{mcm}(a,b)$ | mínimo común múltiplo de los enteros *a* y *b* |
| $\boldsymbol{A}_G$ | matriz de adyacencia del grafo *G* |
| $\boldsymbol{C}_G$ | matriz de adyacencia de costos del grafo *G* |

## Términos de examen

Los siguientes términos se utilizan sin explicaciones en las pruebas de exámenes. Los profesores deben conocer estos términos y su significado y hacer que sus alumnos se familiaricen con ellos. La lista no es exhaustiva. Pueden aparecer otros términos, en cuyo caso se debe dar por supuesto que se utilizan con su significado habitual (por ejemplo, "explique" o "estime"). Los términos que aquí se incluyen son aquellos cuyo significado en matemáticas a veces puede ser distinto del habitual.

En el material de ayuda al profesor se pueden encontrar más aclaraciones y ejemplos.

| | |
|---|---|
| *Escriba* | Obtenga la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido. |
| *Calcule* | Obtenga la respuesta (o respuestas) mostrando todos los pasos pertinentes. También se puede utilizar "halle" o "determine". |
| *Halle* | Obtenga la respuesta (o respuestas) mostrando todos los pasos pertinentes. También se puede utilizar "calcule" o "determine". |
| *Determine* | Obtenga la respuesta (o respuestas) mostrando todos los pasos pertinentes. También se puede utilizar "halle" o "calcule". |
| *Derive* | Obtenga la derivada de una función. |
| *Integre* | Obtenga la integral de una función. |
| *Resuelva* | Obtenga las soluciones o raíces de una ecuación. |
| *Dibuje con precisión* | Represente a lápiz por medio de un diagrama o una gráfica **precisos** y rotulados. Se debe utilizar la regla para las líneas rectas. Los diagramas se deben dibujar a escala. En las gráficas, cuando el caso lo requiera, los puntos deben aparecer correctamente marcados y unidos, bien por una línea recta, o por una curva suave. |
| *Dibuje aproximadamente* | Represente por medio de un diagrama o una gráfica, si fuese necesario, rotulados. El dibujo ha de ofrecer una idea general de la figura, el diagrama o la gráfica que se pide. En el caso de las gráficas, el dibujo ha de incluir las características de las mismas, tales como puntos de corte, máximos, mínimos, puntos de inflexión y asíntotas. |
| *Sitúe* | Marque la posición de puntos en un diagrama. |
| *Compare* | Describa las similitudes y diferencias entre dos o más elementos. |
| *Deduzca* | Llegue a un resultado a partir de datos conocidos. |
| *Justifique* | Exponga una razón válida para fundamentar una conclusión o respuesta. |
| *Demuestre* | Utilice una secuencia de pasos lógicos para obtener el resultado requerido de un modo formal. |
| *Compruebe que* | Obtenga el resultado requerido (posiblemente, utilizando la información dada) sin la rigurosidad de una prueba. En este tipo de preguntas, por lo general, la comprobación no deberá basarse en el uso de la calculadora. |
| *A partir de lo anterior* | Utilice los resultados obtenidos anteriormente para responder a la pregunta. |
| *A partir de lo anterior o de cualquier otro modo* | La expresión sugiere que se utilicen los resultados obtenidos anteriormente, pero también pueden considerarse válidos otros métodos. |

## Evaluación de los objetivos específicos

Ciertos objetivos específicos se pueden vincular más fácilmente a una u otra modalidad de evaluación. Algunos de ellos se evaluarán más adecuadamente en la evaluación interna (tal como se indica en la sección que sigue) y de forma limitada en las pruebas de examen.

| **Objetivo específico** | **Contribución al total** |
|---|---|
| Conocer y utilizar conceptos y principios matemáticos. | 15% |
| Leer, interpretar y resolver un problema dado utilizando términos matemáticos adecuados. | 15% |
| Organizar y representar la información y los datos en forma de tablas, gráficas y diagramas. | 12% |
| Conocer y utilizar la terminología y la notación adecuadas (evaluación interna). | 5% |
| Formular un razonamiento matemático y exponerlo con claridad. | 10% |
| Seleccionar y utilizar técnicas y estrategias matemáticas adecuadas. | 15% |
| Demostrar la comprensión tanto del significado de los resultados como de su coherencia (evaluación interna). | 5% |
| Reconocer modelos y estructuras en situaciones diversas y hacer generalizaciones (evaluación interna). | 3% |
| Reconocer las aplicaciones prácticas de las matemáticas y demostrar su comprensión (evaluación interna). | 3% |
| Utilizar como herramientas matemáticas los instrumentos tecnológicos apropiados (evaluación interna). | 15% |
| Demostrar la comprensión de los modelos matemáticos y saber utilizarlos apropiadamente (evaluación interna). | 2% |

# Descripción detallada de la evaluación interna 20%

## Propósito de la carpeta

El propósito de la carpeta es proporcionar al alumno la oportunidad de obtener una calificación por los trabajos matemáticos desarrollados en circunstancias normales, es decir, sin la presión ni las limitaciones de tiempo impuestas por los exámenes escritos. Por lo tanto, se debe poner especial énfasis en una redacción correcta junto a una seria reflexión matemática.

Asimismo, la intención de la carpeta es ofrecer a los alumnos oportunidades para comprender mejor ciertos conceptos y procesos matemáticos. Se espera que, al realizar los trabajos de la carpeta, los alumnos saquen provecho de estas actividades matemáticas y que les resulten motivadoras y gratificantes.

Con la carpeta se pretende:

- que los estudiantes desarrollen una perspectiva propia acerca de la naturaleza de las matemáticas, así como la capacidad para plantearse sus propias preguntas sobre la disciplina
- proporcionar a los estudiantes oportunidades de realizar trabajos matemáticos extensos sin las limitaciones de tiempo impuestas por los exámenes escritos
- que los estudiantes sean capaces de desarrollar destrezas y técnicas propias y sentir la satisfacción de aplicar procedimientos matemáticos según su criterio
- proporcionar a los estudiantes oportunidades de experimentar la belleza, las posibilidades y la utilidad de las matemáticas
- proporcionar a los estudiantes oportunidades de descubrir, utilizar y apreciar las posibilidades de las calculadoras o los computadores como herramientas para el trabajo matemático
- que los estudiantes sean capaces de desarrollar cualidades tales como la paciencia y la perseverancia, así como de reflexionar sobre el significado de los resultados que obtienen
- proporcionar a los estudiantes oportunidades de exponer con confianza lo que saben y lo que son capaces de hacer.

## Objetivos específicos

La carpeta la evalúa internamente el profesor y la modera externamente IBO. Los criterios de evaluación interna se han desarrollado teniendo en cuenta los objetivos específicos para matemáticas en su conjunto, pero en especial los que aquí se incluyen, puesto que se evalúan mejor sin las limitaciones de tiempo que imponen los exámenes escritos.

En relación con la carpeta, y cuando corresponda, se espera que los alumnos sean capaces de:

- conocer y utilizar la terminología y la notación adecuadas
- organizar y representar la información y los datos en forma de tablas, gráficas y diagramas
- reconocer modelos y estructuras en situaciones diversas y hacer generalizaciones
- manifestar una comprensión y un uso adecuado de los modelos matemáticos
- reconocer y manifestar una comprensión de las aplicaciones prácticas de las matemáticas
- utilizar como herramientas matemáticas los medios tecnológicos adecuados.

## Requisitos

La carpeta debe constar de dos trabajos asignados por el profesor y realizados por el alumno durante el curso.

Cada uno de los trabajos de la carpeta se debe basar en:

- una de las áreas del programa de estudios
- uno de los siguientes tipos de tareas:
    - tareas de tipo I: investigación matemática
    - tareas de tipo II: utilización de modelos matemáticos.

El nivel de complejidad del trabajo matemático del alumno debe ser similar al establecido en el programa de estudios. No se pretende que se enseñe a los alumnos temas adicionales para que sean capaces de realizar una tarea específica.

Todas las carpetas han de contener dos trabajos: una tarea de tipo I y una de tipo II.

# Sugerencias para los profesores

Estas tareas se deben realizar a lo largo del curso y no dejarlas para el final del mismo. Se recomienda que los profesores ofrezcan a sus alumnos la posibilidad de explorar distintos aspectos de tantos temas como sea posible.

El trabajo de la carpeta debe integrarse en la programación del curso de modo que favorezca el aprendizaje, ya sea al introducir un tema, al reforzar un significado matemático o como ejercicio de repaso. Por tanto, todas las tareas deben estar relacionadas con la programación del curso que ha desarrollado cada profesor en función del conocimiento y las destrezas que el alumno ha de adquirir.

## Uso de medios tecnológicos

Se debe poner énfasis en la utilización de la notación **matemática** y la terminología correctas, en contraposición con la notación de las **calculadoras** o de los **computadores**; así como en la elaboración de una adecuada documentación del uso de las tecnologías. Por tanto, se requerirá a los alumnos que reflexionen sobre los procesos y algoritmos matemáticos que realiza el medio tecnológico que emplean, y que lo expresen de forma clara y concisa.

# Tareas de tipo I: investigación matemática

Aunque muchos profesores utilizan en sus clases un enfoque orientado a la resolución de problemas, los alumnos también han de tener la oportunidad formal de llevar a cabo un trabajo de investigación. Con la investigación matemática se pretende destacar que:

- la idea de investigación es fundamental en el estudio de las matemáticas
- el trabajo de investigación conduce con frecuencia a la compresión del modo en que las matemáticas se pueden aplicar a la resolución de problemas en diversos campos
- el aspecto relativo al descubrimiento, inherente a un trabajo de investigación, profundiza la comprensión y proporciona una motivación intrínseca
- durante el proceso de investigación, los alumnos adquieren conocimientos matemáticos, técnicas de resolución de problemas, conocimientos de conceptos fundamentales y una mayor confianza en sí mismos.

Toda investigación se desarrolla a partir de un problema inicial. El mismo se debe establecer claramente, sin ambigüedades, y debe:

- suponer un desafío y una oportunidad para utilizar la creatividad
- admitir múltiples vías de solución, es decir, incluir posibilidades de que los alumnos elijan distintas formas de proceder de entre una gama de opciones.

## Destrezas básicas que se evalúan

- Elaboración de una estrategia
- Generación de datos
- Reconocimiento de modelos o estructuras
- Búsqueda de otros casos
- Formulación de una proposición general
- Comprobación de la proposición general
- Justificación de la proposición general
- Uso adecuado de las tecnologías

## Tareas de tipo II: utilización de modelos matemáticos

La resolución de problemas induce, por lo general, a un enfoque orientado al proceso, mientras que la utilización de modelos matemáticos requiere un enfoque experimental. Al considerar distintas opciones, los alumnos pueden utilizar los modelos para llegar a una conclusión determinada, a partir de la cual poder resolver el problema. La evaluación del proceso de utilización de modelos deberá centrarse en si el modelo seleccionado es apropiado a la situación dada, y en la interpretación crítica de los resultados del modelo en la situación tomada de la realidad.

La utilización de modelos matemáticos implica las siguientes destrezas:

- formulación matemática del problema tomado de la realidad
- construcción de un modelo
- resolución del problema
- interpretación de la solución en la situación tomada de la realidad (es decir, mediante la modificación o ampliación del problema)
- reconocimiento de que se pueden utilizar distintos modelos para resolver el mismo problema
- comparación entre los distintos modelos
- identificación de los ámbitos de validez de los modelos
- identificación de las posibles limitaciones de las tecnologías
- manejo de datos.

### Destrezas básicas que se evalúan

- Identificación de las variables del problema
- Construcción de las relaciones entre estas variables
- Manejo de los datos relativos al problema
- Estimación de los valores de los parámetros del modelo que no se pueden medir o calcular a partir de los datos
- Valoración de la utilidad del modelo
- Comunicación de todo el proceso
- Uso adecuado de las tecnologías

# Seguimiento y orientación

El profesor debe asegurarse de que sus alumnos comprenden el significado de las consecuencias y conclusiones que pueden constituir el resultado de una tarea determinada. Ello es especialmente importante cuando el trabajo de investigación se utiliza para introducir un tema del programa de estudios. El profesor deberá asignar horas lectivas al trabajo de seguimiento cuando se desarrolla la programación del curso.

También es necesario que los alumnos reciban comentarios sobre el trabajo que están realizando, de modo que tengan en cuenta otras estrategias para desarrollar su razonamiento matemático, y que se les proporcione orientación para mejorar sus destrezas en la redacción de los trabajos matemáticos.

# Organización y desarrollo de la carpeta

## Distribución del tiempo

El *Vademécum* establece que un curso del Nivel Superior debe impartirse en 240 horas lectivas. En Matemáticas NS, 10 de estas horas se han de asignar al trabajo relacionado con la carpeta. Esto permite disponer de tiempo para que los profesores expliquen a los alumnos los requisitos de la carpeta, y para que éstos trabajen individualmente durante las horas lectivas.

Los alumnos deben disponer de tiempo para realizar más de dos trabajos durante el curso. De este modo podrán elegir los dos mejores para incluirlos en la carpeta.

## Establecimiento de las tareas

El profesor debe establecer tareas apropiadas que cumplan con los requisitos de la carpeta.

No es obligatorio proporcionar la misma tarea a todos los alumnos, ni tampoco que todas sean distintas. El profesor establecerá las tareas de acuerdo a las necesidades de sus alumnos.

El profesor puede diseñar sus propias tareas, utilizar las incluidas en las publicaciones de material de ayuda al profesor y en el Centro pedagógico en línea (CPEL), o modificar tareas obtenidas de otras fuentes.

## Entrega de trabajos

El trabajo terminado se debe entregar al profesor para su evaluación entre 3 y 10 días después de asignado. No se debe permitir a los alumnos volver a entregar un trabajo una vez que ha sido evaluado.

No es imprescindible que el trabajo se realice con un procesador de textos. Sin embargo, cuando no sea así, deberá escribirse con tinta.

Se ruega que, al enviar la muestra del trabajo para la moderación, tengan en cuenta que se debe enviar el trabajo original con las puntuaciones y comentarios del profesor incluidos en el mismo. No se admiten fotocopias.

## Orientación y autoría original

### Requisitos

Los alumnos han de estar familiarizados con los requisitos y con los criterios de evaluación de la carpeta: durante las horas lectivas podrían evaluar trabajos de años anteriores utilizando esos criterios.

### Discusión en clase

También se pueden utilizar las horas lectivas para analizar una determinada tarea. La discusión se puede establecer entre el profesor y los alumnos (o un alumno en particular), o entre dos o más alumnos. Si los alumnos hacen preguntas concretas, el profesor, cuando corresponda, debe orientarlos hacia líneas de investigación fructíferas, en lugar de proporcionarles una respuesta directa.

### Autoría original

Los alumnos deben ser conscientes de que el trabajo escrito que entregan ha de ser de creación completamente personal. El profesor debe fomentar entre sus alumnos un sentido de la responsabilidad respecto a su aprendizaje, de manera que perciban su trabajo como algo propio de lo que se sientan orgullosos. Cuando realizan el trabajo fuera del aula, los alumnos han de trabajar por sí solos. Aunque, desde el punto de vista pedagógico, el trabajo en grupo puede resultar conveniente en algunas ocasiones, no es adecuado para la carpeta.

En caso de duda, se puede verificar la autoría original del trabajo mediante alguno de los siguientes métodos:

- comentar el trabajo con el alumno
- pedir al alumno que explique los métodos utilizados y haga un resumen de los resultados
- pedir al alumno que repita la tarea utilizando distintos datos
- pedir al alumno que aporte las fuentes utilizadas.

También es aconsejable que el profesor solicite a los alumnos que firmen todas las tareas antes de entregarlas, para indicar que se trata de su propio trabajo.

Se deben incluir la bibliografía y, mediante comentarios a pie de página, las referencias completas a todas las fuentes externas citadas o utilizadas en el trabajo.

El trabajo del alumno debe incorporar las definiciones relativas a la terminología que no haya sido estudiada previamente en clase.

## Registro del profesor

Los profesores deben llevar un registro cuidadoso de los trabajos de los alumnos para asegurarse de que todas las carpetas cumplan con los requisitos.

Para cada uno de los trabajos se debe incluir:

- detalles exactos de la tarea que se ha asignado al alumno
- áreas del programa de estudios relacionadas con la tarea
- fecha en que se ha asignado la tarea al alumno y fecha de entrega
- tipo de tarea (tipo I o tipo II)
- toda la información relativa a las destrezas y conceptos del programa de estudios, y si ya se habían estudiado en el momento en que se le asignó la tarea o no.

Se ruega consultar el material de ayuda al profesor donde existen ejemplos de formularios que se pueden utilizar.

# Criterios de evaluación interna

## Presentación

Todos los trabajos se evalúan según los seis criterios descritos a continuación. Los criterios A, B, E y F son iguales para los dos tipos de tareas. Los criterios C y D son distintos para cada tipo de tarea.

### Criterios de evaluación para las tareas de tipo I: investigación matemática

Las tareas de tipo I se deben evaluar según los siguientes criterios.

| | |
|---|---|
| **Criterio A** | Uso de la notación y de la terminología |
| **Criterio B** | Comunicación |
| **Criterio C** | Procedimientos matemáticos: búsqueda de modelos |
| **Criterio D** | Resultados: generalización |
| **Criterio E** | Uso de medios tecnológicos |
| **Criterio F** | Calidad del trabajo |

## Criterios de evaluación para las tareas de tipo II: utilización de modelos matemáticos

Las tareas de tipo II se deben evaluar según los siguientes criterios.

| | |
|---|---|
| **Criterio A** | Uso de la notación y de la terminología |
| **Criterio B** | Comunicación |
| **Criterio C** | Procedimientos matemáticos: desarrollo de un modelo |
| **Criterio D** | Resultados: interpretación |
| **Criterio E** | Uso de medios tecnológicos |
| **Criterio F** | Calidad del trabajo |

# Aplicación

Se utiliza un método de evaluación basado en criterios. Es decir, cada carpeta se evalúa con relación a los criterios de evaluación establecidos en su trabajo y no en relación con el trabajo de otros alumnos.

La finalidad es encontrar, para cada criterio, el descriptor que refleje de forma más adecuada el nivel de logro que haya alcanzado el alumno.

Se ha de leer el descriptor de cada nivel, empezando por el nivel 0, hasta que se llegue a uno que describa un nivel de logro que no se alcance. El nivel que alcance el alumno será, por tanto, el inmediatamente anterior, y es el que se deberá asignar.

Por ejemplo, si se consideran los sucesivos niveles de logro de un criterio determinado y la descripción del nivel 3 no corresponde al trabajo del alumno, entonces se le ha de asignar el nivel 2.

En los criterios sólo se pueden asignar números enteros: no se aceptan fracciones ni decimales.

Los niveles de logro más altos no implican un trabajo perfecto. Los profesores no han de dudar en utilizar los niveles extremos, incluido el cero, si describen de forma adecuada el trabajo que se está evaluando.

Se debe hacer uso de la serie completa de niveles de logro de modo apropiado. En los trabajos, un alumno que obtenga un nivel de logro alto con relación a un criterio, no obtendrá necesariamente niveles altos en relación con los otros criterios.

Del mismo modo, un alumno que obtenga un determinado nivel de logro con relación a un criterio no tendrá por qué obtener forzosamente niveles similares en los demás. No se debe suponer que la evaluación general de los alumnos haya de dar como resultado una distribución determinada de los puntos.

Se recomienda que los alumnos tengan acceso a los criterios de evaluación en todo momento.

# Nota final de la carpeta

Cada carpeta ha de contener dos trabajos (si se han realizado más de dos, se deben elegir los dos mejores para entregar).

Para calcular la puntuación final:

- se deben sumar todos los niveles de logro de los dos trabajos para obtener el total sobre 40.

Por ejemplo:

| **Criterio/tarea** | A | B | C | D | E | F | **Puntuación final** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Tipo I** | 1 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | |
| **Tipo II** | 2 | 3 | 4 | 2 | 2 | 2 | |
| | 3 + | 6 + | 7 + | 4 + | 5 + | 4 | **= 29** |

La puntuación final es 29.

# Carpetas incompletas

Si sólo se entrega un trabajo, se asignará cero en cada uno de los criterios para el trabajo que falta.

# Carpetas que no cumplen con los requisitos

Si se entregan dos trabajos, pero no son uno de tipo I y otro de tipo II (por ejemplo, los dos son tareas de tipo I o los dos son tareas de tipo II), se puntuarán las dos tareas, y se aplicará una penalización de 10 puntos al resultado final.

# Nivel de las tareas

Las tareas que establezca el profesor deben ser adecuadas al nivel del curso. Se deben elegir tareas adecuadas a un curso de nivel superior, más que a un curso de nivel medio.

# Niveles de logro

## Criterio A: uso de la notación y de la terminología

| **Nivel de logro** | |
|---|---|
| 0 | El alumno no utiliza la notación ni la terminología adecuadas. |
| 1 | El alumno utiliza alguna notación o terminología adecuada. |
| 2 | El alumno utiliza la notación y la terminología adecuadas de forma sistemática a lo largo de todo el trabajo. |

Es posible que las tareas se asignen antes de que los alumnos hayan estudiado la notación y la terminología que necesitan utilizar. Por tanto, la idea clave que subyace en este criterio es evaluar si la terminología que utiliza el alumno describe bien el contexto. El profesor ha de proporcionar un nivel adecuado del conocimiento que necesitan los alumnos por medio de notas entregadas en el momento de asignarles la tarea.

Se requiere una notación matemática correcta, pero puede ir acompañada de la notación que ofrecen las calculadoras, en especial cuando los alumnos están validando su uso de las tecnologías.

Este criterio se refiere al uso adecuado de los símbolos matemáticos (por ejemplo, el uso de "≈" en lugar de "=" o la notación correcta para los vectores).

La presentación del trabajo mediante un procesador de textos no incrementa el nivel de logro en este criterio, como tampoco en el criterio B.

El alumno ha de tener cuidado al escribir los símbolos matemáticos si el programa de procesador de textos que utiliza no los incorpora. Por ejemplo, si escribe $x \wedge 2$ en lugar de $x^2$ se consideraría que el uso no es adecuado, y no conseguiría el nivel 2.

## Criterio B: comunicación

| Nivel de logro | |
|---|---|
| 0 | El alumno no proporciona explicaciones ni utiliza formas de representación apropiadas (por ejemplo, símbolos, tablas, gráficas o diagramas). |
| 1 | El alumno intenta proporcionar explicaciones o utiliza algunas formas de representación apropiadas (por ejemplo, símbolos, tablas, gráficas o diagramas). |
| 2 | El alumno proporciona explicaciones o razonamientos adecuados y los expone utilizando formas de representación apropiadas (por ejemplo, símbolos, tablas, gráficas o diagramas). |
| 3 | El alumno proporciona explicaciones o razonamientos completos y coherentes y los expone utilizando formas de representación apropiadas (por ejemplo, símbolos, tablas, gráficas o diagramas). |

Este criterio también evalúa la coherencia. El trabajo puede obtener una buena puntuación si el lector no necesita recurrir a la formulación utilizada para establecer la tarea. En otras palabras, si la tarea se puede calificar de forma independiente.

El nivel 2 no se puede alcanzar si el alumno se limita a presentar las operaciones matemáticas, sin explicaciones.

Se deben insertar las gráficas, tablas y diagramas donde corresponda en el trabajo y no adjuntarlas como anexos al final del documento. Las gráficas han de dibujarse cuidadosamente en papel milimetrado y aparecer correctamente rotuladas. Se admiten gráficas que hayan sido generadas por un programa de computador o con una calculadora con volcado de pantalla, siempre que estén correctamente rotuladas, aunque sea a mano. La utilización de colores en las gráficas puede ayudar a que resulten más claras.

## Criterio C: procedimientos matemáticos

### Tareas de tipo I: investigación matemática - Búsqueda de modelos

| Nivel de logro | |
|---|---|
| 0 | El alumno no realiza ningún intento de utilizar una estrategia matemática. |
| 1 | El alumno utiliza una estrategia matemática para producir los datos. |
| 2 | El alumno organiza los datos obtenidos. |
| 3 | El alumno intenta analizar los datos de modo que sea posible formular una proposición general. |
| 4 | El alumno analiza de forma satisfactoria los datos correctos de modo que sea posible formular una proposición general. |
| 5 | El alumno comprueba la validez de la proposición general por medio de otros ejemplos. |

Los alumnos sólo pueden alcanzar el nivel 3 si la cantidad de datos generados es suficiente para justificar un análisis.

### Tareas de tipo II: utilización de modelos matemáticos - Desarrollo de un modelo

| Nivel de logro | |
|---|---|
| 0 | El alumno no define las variables, los parámetros o las restricciones de la tarea. |
| 1 | El alumno define algunas variables, parámetros o restricciones de la tarea. |
| 2 | El alumno define las variables, los parámetros y las restricciones de la tarea e intenta crear un modelo matemático. |
| 3 | El alumno analiza correctamente las variables, los parámetros y las restricciones de la tarea de modo que sea posible establecer un modelo matemático pertinente a la misma y adecuado al nivel del curso. |
| 4 | El alumno estudia si el modelo se ajusta bien a los datos. |
| 5 | El alumno aplica el modelo a otras situaciones. |

En el nivel de logro 5, la aplicación del modelo a otras situaciones podría incluir, por ejemplo, un cambio de parámetro o una mayor cantidad de datos.

## Criterio D: resultados

### Tareas de tipo I: investigación matemática - Generalización

| Nivel de logro | |
|---|---|
| 0 | El alumno no formula ninguna proposición general coherente con los modelos o estructuras generados. |
| 1 | El alumno intenta formular una proposición general coherente con los modelos o estructuras generados. |
| 2 | El alumno formula correctamente una proposición general coherente con los modelos o estructuras generados. |
| 3 | El alumno expresa la proposición general correcta utilizando la terminología matemática adecuada. |
| 4 | El alumno establece correctamente el alcance o las limitaciones de la proposición general. |
| 5 | El alumno ofrece una justificación formal, correcta, de la proposición general. |

Si un alumno ofrece una demostración formal correcta de la proposición general, pero que no tiene en cuenta el alcance o las limitaciones, se le ha de asignar el nivel 4.

## Tareas de tipo II: utilización de modelos matemáticos - Interpretación

| Nivel de logro | |
|---|---|
| 0 | El alumno no ha llegado a ningún resultado. |
| 1 | El alumno ha llegado a algunos resultados. |
| 2 | El alumno no ha interpretado si los resultados del modelo en el contexto de la tarea son razonables. |
| 3 | El alumno ha intentado interpretar si los resultados del modelo en el contexto de la tarea son razonables, con el nivel de precisión adecuado. |
| 4 | El alumno ha interpretado correctamente si los resultados del modelo en el contexto de la tarea son razonables, con el nivel de precisión adecuado. |
| 5 | El alumno ha interpretado correctamente y de forma crítica si los resultados del modelo en el contexto de la tarea son razonables, para incluir posibles limitaciones y modificaciones de los resultados, con el nivel de precisión adecuado. |

## Criterio E: uso de medios tecnológicos

| Nivel de logro | |
|---|---|
| 0 | El alumno utiliza la calculadora o el computador sólo para cálculos iterativos. |
| 1 | El alumno intenta utilizar la calculadora o el computador de un modo que podría contribuir a un mejor desarrollo de la tarea. |
| 2 | El alumno hace uso limitado de la calculadora o el computador de un modo que contribuye a un mejor desarrollo de la tarea. |
| 3 | El alumno hace uso completo y eficaz de la calculadora o el computador de un modo que contribuye significativamente a un mejor desarrollo de la tarea. |

El nivel de tecnología de las calculadoras o los computadores varía de un colegio a otro. Por lo tanto, el profesor ha de establecer el nivel de medios tecnológicos a los que sus alumnos tienen acceso.

El uso de un computador o de una calculadora de pantalla gráfica para generar gráficas o tablas puede no ser significativo en el desarrollo de la tarea.

## Criterio F: calidad del trabajo

| Nivel de logro | |
|---|---|
| 0 | La calidad del trabajo del alumno es baja. |
| 1 | La calidad del trabajo del alumno es satisfactoria. |
| 2 | La calidad del trabajo del alumno es destacada. |

A los alumnos que satisfacen todos los requisitos correctamente se les debe asignar el nivel 1. Para que un alumno alcance el nivel 2, su trabajo debe demostrar precisión, conocimiento y un alto nivel de comprensión matemática.